FEATURE

Kavli IPMU 主任研究員 **ミハイル・カプラノフ**
Mikhail Kapranov
専門分野：数学

数学と物理学により触発された幾何学の趣（おもむき）

幾何学は数学の中で最も古い分野の一つです。その目的は空間の構造を記述することで、私たちの周りの空間を物理的に理解するという動機に基づくものです。人間の考え方では、幾何学はいわゆる幾何学的直観（イメージの構成要素の間の関係を形式的に記述するまでもなく私たちが理解できてしまうこと）の源である視覚に支配されています。幾何学とはどういうものであるべきか、ということについての私たちの仮定の基礎を形作るものは、私たちの周囲にある日常的なものを見る日常的な経験なのです。

しかし、現代物理学によれば、きわめて短い距離での物理的空間（あるいは時空）の構造は未だ知られていないのです。何故でしょうか？ 視覚というものが物体によって反射された光を目で見ることに基づくということがその理由です。ところが、実際は光とは波動現象なのです。ですから、この方法では光の波長より小さな「物体」を正確に観察することは困難です。解像度を上げる試みは、見ようとする物体が小さければ小さいほど、言わばより高いエネルギーの光の粒（あるいは他の粒子）を衝突させることになります。私たちが高いエネルギーの粒子を生成する能力には限りがありますから、私たちが極微のものを「見る」能力にも限りがあります。

従って、私たちは空間の極微の領域が日常的に見慣れたものと同じ一般的構造をもつものと単純に仮定することはできないのです。例えば、その領域が、隣同士の距離がきちんと定まった連続的に並ぶ点から成り立っている、といったようなことは自然の法則ではありません。言い換えると、私たちが幾何学の発展の基礎としてきた前提には再検討が必要なのです。

幾何学には微分幾何学、代数幾何学、トポロジー、組合せ幾何学など伝統的にいくつかの分野があります。しかし、そもそも「空間」によって私たちが何を理解するべきかという、ある（例えば上述したような）仮定については全ての分野の見解が一致しています。単にそれを研究するために用いる微分計算、代数方程式などの手段に違いがあるだけです。

しかし、この数十年の間に、私たちの幾何学的な形についての考え方そのものの変革を求める新しい幾何学の方向が幾つか現れました。以下、このような方向について話をしたいと思います。

グロタンディークのスキーム理論

新しい幾何学的な手法の大部分は、1960年代初めに A. グロタンディークが新しい代数幾何学の基礎として発展させたスキーム理論に基づいています。その基本的な考えは、「空間」X（その意味は問わず）に関する全情報がX上の関数のデータRによりエンコードされるべきであるというものです。単純な設定ではRはX上のある種の関数の集合により与えられます。ここで関数とは、X上の任意の点xに、ある数値$f(x)$を対応させる規則fを意味します。このような関数は各点毎に足し算、引き算、掛け算が可能です。数学的

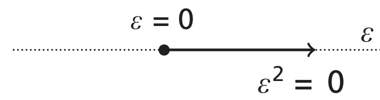


図1　方程式 $\varepsilon^2 = 0$ によって与えられる非古典的空間。

には足し算、引き算、掛け算について閉じている関数（あるいは他の構成要素）の系を「環」と呼びます。関数の環には、掛け算について可換（順序を入れ替えても結果が変わらない）であるという自明であるが重要な性質

$f \cdot g = g \cdot f$

があります。

例えば、X が n 次元座標空間の場合、対応する R は

$$f(x, y) = 2x + 3y + 16x^5y^3 + x^4y^7$$

のような n 変数の多項式（ここでは $n = 2$ とする）の集合で与えられます。X が1つの多項式方程式で与えられる場合は、対応する R は任意の2つの多項式 f と g の差がその方程式の倍数である場合にこれらを同一視するという「自然な同一視」を施した多項式環で与えられます。複数の方程式で与えられる場合についても同様です。X を R の「スペクトル」と呼び、$X = \mathrm{Spec}(R)$ と書きます。

「スペクトル」という言葉は量子物理学での必要性に強い影響を受けた線形演算子のスペクトル理論（つまり固有値理論）から来たものです。従って、これは数学に対する物理学の暗黙の影響の一例なのです。

グロタンディークの理論で重要な（そして当初は議論を巻き起こした）ことは、幾何学的イメージ（スキーム）である $\mathrm{Spec}(R)$ を全く任意の可換環 R に対応させることができる点です。重要で非古典的な例として、「二重数の環 D」があります。この環の元は $a + b\varepsilon$ という式で、掛け算を行うには形式的に $\varepsilon^2 = 0$ という規則を用います。従って、$\varepsilon^2 = 0$ がこの場合の方程式です。$\varepsilon = 0$ とは何が違うのでしょうか? 単純には0以外に2乗して0になる数は存在しないため、D を何かの（空間）上の関数の集合として実現することはできません。それでもスキーム $\mathrm{Spec}(D)$ は意味のある幾何学的解釈ができるのです。つまり、$\mathrm{Spec}(D)$ は1点（そこでは $\varepsilon = 0$）とその点における接線方向を含むだけで、それ以上のデータはもたないものと考えるのです。図1を参照してください。ある意味で、これは「無限小」という古い概念の復活と言えます。ε 自身はまだゼロではありませんが、「非常に小さい」ため、ε^2 は既に無視できる、というものです。また、$\varepsilon^2 \neq 0$ であるが ε のある高次のべき乗はゼロになるというような無限小 ε を考えることもできます。このような無限小（「ニルポテント」と呼ばれる）を含む環は、より古典的な幾何学的イメージ（曲線など）の無限に薄い近傍として思い描くことができます。

非可換幾何学

スキーム理論によりもたらされた「可換環の視覚化」の目覚ましい成功により、その理論を掛け算が $f \cdot g \neq g \cdot f$ となり得る代数的構造である「非可換環」に再度拡張する試みが行われました。

数学者でない人は、このような構造の何が重要なのか不思議に思うかもしれません。実際に「現実の世界」に現れるものなのでしょうか? 実は、非可換環を物理学の最先端にもたらしたものは、量子力学の発見でした。通常の物理量が量子力学では非可換の「作用素」

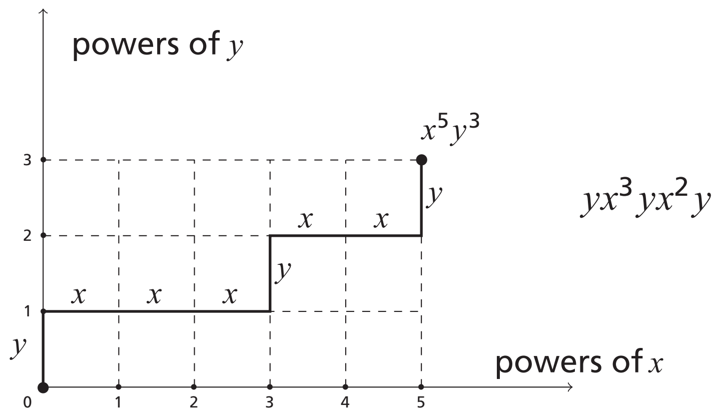


図2　非可換単項式の経路による表現。

に格上げされます。典型的な交換関係として粒子の座標と運動量に対応する作用素の間の $p{\cdot}q - q{\cdot}p = i\hbar$ が挙げられます。純粋数学では、行列の掛け算、あるいは、ある種の演算である合成変換など、他にも多くの例があります。実際、どんな動作でも続けて行うと、通常その結果は順序に依存します。シャツを着て次ぎにジャケットを着るのと、最初にジャケットを着て次ぎにシャツを着るのは同じではありません!

「非可換多項式」の概念により、非可換性の仕組みが理解できます。例として、非可換な2変数 x と y を考えましょう。すると4個の2次単項式 x^2, xy, yx, y^2 がありますが、これらは全て異なります。もし x と y が可換とすると xy と yx は等しいのですが、非可換単項式としては異なります。このように、1個の可換単項式が幾つかの非可換単項式で表されることになります。例えば、x^5y^3 は yx^3yx^2y、あるいは xyx^2yxyx やその他幾つかの非可換単項式に持ち上げられます。普通の単項式、例えば x^5y^3 を平面上の座標（5, 3）の点として図示すると便利です（これはニュートン・ダイアグラムとして知られています）。こうするとこの単項式を非可換に持ち上げることは、街路が縦横のブロック状の都会で（0, 0）から出発して（5, 3）に至る「タクシーの走行経路」に対応します。つまり、東への走行は x に、北への走行は y に対応します（図2参照）。

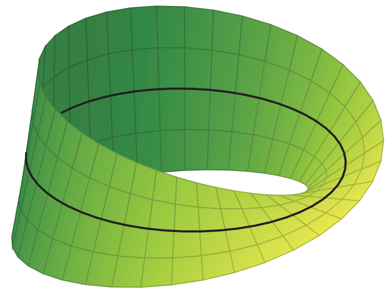
従って、非可換多項式はこのような経路を足し合わせたものになります。これは、x と y を可換にすることは、始点と終点を固定して「経路について和を取る」ことを意味します。即ち、非可換環を強制的に可換にする「可換化」は現代物理学の基本概念的手法である経路積分の代数的類似と見ることができます。

非可換環に幾何学的直感を付加する一つの方法は、空間 X によって連続的にパラメータ付けされたベクトル空間の族である「ベクトル束」という幾何学の概念を用いることです。例えば、メビウスの帯（図3参照）は黒で示す中心円上のベクトル束、すなわち中心円によってパラメータ付けされた「縦の」線の族です。X が環 R に対応する場合は、X 上のベクトル束は R 上の「加群」と呼ばれる代数的対象 M と対応します。加群 M においては、R の元 r と M の元 m を掛け合わせることができ、M の元 $m' = r \cdot m$ が得られます。

非可換環に幾何学的直感を付加することは、このような環を研究するための手段としてだけではなく、もっと良く知られた幾何学的問題へ数多く応用されます。多くの場合、普通の（つまり可換の）、しかし複雑な、あるいは振る舞いの悪い空間を、もっと簡単な非可換の対象で近似することができます。

超幾何

しかし、非可換代数構造は未だに完全な幾何学的解釈が可能なようには見えません。多くの本質的な構成を機能させるものは、可換性なのです。



$$r \cdot m = m'$$

図3　メビウスの帯[1]と加群の乗法。

*1 Picture source: pgfplots.

幾何学の世界に対して、似ているが異なった鍵として働く「可換性に良く似た」性質を探すという別のアプローチがあります。そのような性質の一つが次数付（あるいは超）可換性で、これが超幾何学へと導きます。

この設定では、環 R には偶と奇の2種類の量があるとします。R の一般的な元は偶と奇の元の和で表されます。超可換性（Koszul の符号則としても知られる）は

(1)　$f \cdot g = (-1)^{\deg(f)\cdot\deg(g)} g \cdot f$

で表され、ここで f と g は偶か奇のいずれかで、$\deg(f)$ は f が偶なら0，奇なら1とします。言い換えると、f と g の少なくとも一つが偶の場合は $f \cdot g = g \cdot f$、両方が奇の場合は $f \cdot g = -g \cdot f$ となります。

従って、超可換環は通常の意味で可換ではありません。それにもかかわらず、数学者の経験によれば超可換性は通常の可換環に付随する全ての幾何学的特徴を許します。例えば、通常の（可換である偶の）座標と反可換である奇の座標を共に持つ超多様体を考えることができます。

超可換則は（超代数と呼ばれることもある）この種の代数の精巧な符号則システムの一つに過ぎません。これらの規則に矛盾が無いことは驚くべき事実です。種々の変換によっていろいろな符号の変化が生じますが、何かを2つの異なる方法で行った結果が異なる符号になるということは決して起きません。（もしそうなったら理論全体が成り立たなくなります。）この、ほとんど神秘的とも言える規則の自己無矛盾性は、いやが上にもこの理論の魅力を高めるものです。しかし、この理論や規則が崩壊しない真の理由は、恐らく超代数の物理的起源にあると思われます。

物理学では素粒子にはボゾンとフェルミオンの2種類があることが知られています。その違いは、2個以上のフェルミオンが同じ量子状態に入ることはできない（これはパウリの排他律として知られています）のに対して、ボゾンはそれが可能な点にあります。たとえば、電子と陽子はフェルミオンですが、（光の量子である）光子はボゾンです。もっと数学的なレベルでは、何個かのフェルミオンの系の状態ベクトルは、任意の2個を交換すると式（1）を思い出させるように符号を変えます。この電子のフェルミオンとしての性質が原子の構造や元素の基礎となっており、従って私たちの知っている宇宙が存在するために根本的に重要なものなのです。

超幾何学の着想は1960年代の末に F. Berezin によって初めて示唆されました。彼には、フェルミ粒子の振る舞いを説明する幾何学を創るという明確な物理的動機がありました。これはボゾンとフェルミオンの間の対称性である、いわゆる「超対称性」という大きなプログラムの一部となりました。最も重要なのは、こういった考え方が超弦理論で極めて有用であると分かったことです。超幾何学に現れる ± 符号が、やっかいものどころか、物理の理論により与えられる答えを（見かけの無限大を含まない）もっと扱い易いものにする

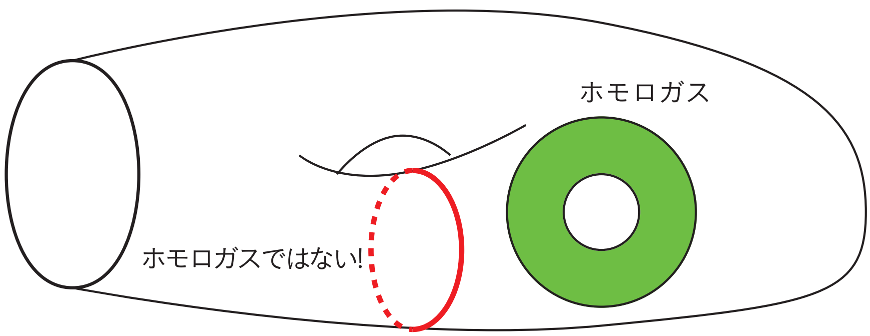


図4　ホモロガスなサイクルとホモロガスではないサイクル

という重要な目的に資するものであるということになったのです。すなわち、計算に現れる個々の項は非常に大きな値をもつが、和を取ると±符号のおかげで結果は有限に収まることになり、これは超幾何学無しには起こり得ないことです。

現代の超幾何は超弦理論の背後に潜む幾何学的言語としての役割を果たしています。特に、代数曲線とそのモジュライ空間の超類似は超弦理論の多くの側面で数学的に強固な背景を提供しています。

幕間：ホモロジー代数学

全ての数学的対象は、少なくとも形式的には、「元」と呼ばれるより簡単な何らかの要素の集まりである「集合」です。従って、円はその上の点の集合、環はそれを構成する関数の集合、等々です。数学的論法の主流は未だにこのアプローチなのです。数学者は、このような言葉で定式化されていない数学的な構成は理解しないのが普通です。

さて、既存の集合から新しい集合（数学的対象）を構成するには、2つの基本的に異なる双対的な方法があります。

一つは「条件」によるもので、例えば円を方程式$x^2 + y^2 = 1$で記述する方法です。

もう一つは「パラメータ付け」によるもの、すなわち全てのデータのリストを余すところなく示すことによるもので、例えば上と同じ円は$x = \cos(\alpha)$, $y = \sin(\alpha)$によってパラメータ付けされます。

広い意味では「ホモロジー代数」は数学の中でこれら2種類の記述の間の関係を調べるものと言えます。しばしば同一の対象について2種類の記述を完全に同等にはできないことがあります。それらの間には「ギャップ」があって、条件を満たす元を全てリストすることができません。このギャップは「コホモロジー」という数学的概念によって定式化されます。

ホモロジー代数は、変形により不変であるような空間の大まかな形状を研究する幾何学の一部であるトポロジーに起源があります。このような構造を理解するため、境界を持たない幾何学的図形である「サイクル」を考えます。2つのサイクルはその違いが境界（図4の緑の領域が例）の場合、ホモロガスであると言います。

このようにして、例えば球面とトーラスの違いを次のように言うことができます。トーラスには互いにホモロガスでない1次元のサイクルが存在しますが、球面ではそのようなことは起こりません（図4参照）。従って、球面上の1次元サイクルにおいては条件（境界を持たないこと）とリスト（境界であること）が同じ幾何的概念（境界を取るという操作）に由来します。

このような現象（条件対リスト）を系統的に調べることを可能にする「コチェイン複体」と呼ばれる数学的構造は、ベクトル空間Vが境界演算子の類似で2回作用すると0になる「微分（differential）」dと組になったもので、これは「境界には境界が存在しない」

図5　滑らかで特異性を持つ空間。

という基本的な幾何学的性質を定式化したものです。たいていの場合次数付けも行われ、ベクトルには整数が次数付けられます。

このタイプのアプローチも物理学で（1970年代に最初に導入した物理学者、C. Becchi、A. Rouet、R. Stora、I. Tyitinの名前から）BRST量子化として知られ、徐々に広がり始めています。このアプローチではdによって消滅する「状態」ベクトルψだけが物理的と考えられます。さらに、2つの物理的状態ψとψ'はその差が$d(\phi)$の形の場合に限り同値（物理的に等しい!）と考えられます。このようにしてコホモロジー、すなわちギャップに対して実際の物理的意味が与えられました! この大胆なアイディアの意味する全体像は、まだ十分理解が進んでいるとは言えません。

導来幾何学

幾何学は平坦な（線形の）空間から（多様体と呼ばれる）曲がった空間に進む方法を教えてくれると言えます。多様体は各点において接空間と呼ばれる平坦な空間で近似することができます。平坦な空間の概念として別のものを選ぶ際、しばしば曲がった空間に格上げされることがあります。導来幾何学の着想はこのアプローチをホモロジー代数のアプローチと結びつけるものです。言い換えると、平坦模型として線形空間ではなく、先に述べた複体を考えることなのです。

こうすることの動機は、当初は純粋に数学固有のものでした。モジュライ空間（幾何学的構造のパラメータの空間）が特異性を示す、つまり円錐の尖点のようにその近傍で線形近似が成り立たなくなる点をもつこと（図5参照）は、かなり前から知られていました。この困難は、導来構造を導入して性質の良い線形近似をもつ新たな対象を生成することにより克服できることが分かりましたが、これは複体による近似なのです!

しかし、導来化された世界に進むことは私たちの幾何学的対象の数を劇的に増大させます。通常の意味の「空間」に加えて（グロタンディークの意味でのスキームであると理解される場合でさえ）、別のタイプの幾何学的対象が見出されます。それらは既知のものもあれば新規のものもありますが、大まかには接空間（複体）の次数の範囲で分類できます。図6に幾つかの例と対応する接空間の次数の範囲を示します。この様に、スタック（その範囲は(−1)と0から成る）は「内在的対称性付きの空間」（物理におけるゲージ対称性のようなもの）を記述します。ほとんどのモジュライ空間は実際、スタックになります。高次スタックは更により洗練された対称性を記述します。

直感的には次のように言うこともできます。正の（右側の）範囲は複雑な（特異）点近傍の局所的な振る舞いを詳細に調べる「局所的幾何学」に対応し、負の（左側の）範囲は同様に空間の大域的でトポロジカルな性質を調べる「大域的幾何学」に対応します。この幾何学の2つの相補的な側面が自然に共通の枠組みに収まることは驚くべきことと言えます。

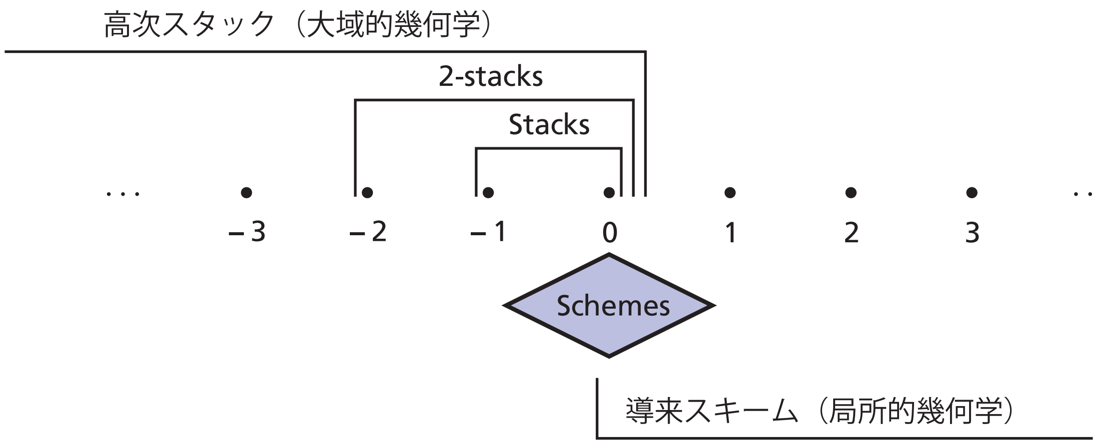


図6　導来幾何学の概観。

その起源はやや抽象的ですが、今までに導来幾何学の物理学に対する多くの注目すべき応用が見出されています。このようにして導来スタック（主として右側方向に属する対象）はトポロジカル場の量子論における積分サイクルの源を与えます。シンプレクティック多様体（古典力学のハミルトニアン形式の基礎をなす幾何学的対象）の導来類似は、この数年、多くのモジュライ空間の持つ構造として浮かび上がってきました。

導来化された世界の可換性は超符号則（1）も含むため、超幾何学とも強い関係があります。実際、（1）の根底にある符号システム（このような構造はピカール亜群と呼ばれます）に、高次元の球面の間の写像の分類（いわゆる安定ホモトピー群）の観点から純粋にトポロジカルな解釈を与えることができます。次数 deg (f)（整数と仮定）は、次元の同じ球面の間の写像の次数として知られる整数不変量に対応します。2つの符号 ± は $n+1$ 次元と n 次元（ここで n は3以上）の球面の間の2種類の写像に対応します。

結論

以上、数学者が使っている新しい幾何学的手法の例をほんの幾つか紹介しました。「現実の世界」を記述するのはどの幾何学でしょうか？ このような記述のために必要かもしれない幾何学が他にもあるでしょうか？ 今までのところ、答えは知られていません。極めて短距離での時空の概念はそのようなものとしては意味がないということさえあるかもしれません。もっと（滑らかではない）粒々状の、もっと無秩序な量子的構造が取って代わることになるかもしれません。しかし、このような事柄について意味のある話をすることでさえ、それを可能とするには、それらと私たちの幾何学的直感および人間の思考パターンとを結ぶ橋が必要なのです。正しい答えを得るには適切な質問が必要ですが、それを妨げているものは、どのような幾何学が可能なのかということについての私たちの想像力の欠如かもしれません。

私には、魅力的な力を持つ超幾何学と物理的に有望な超対称性が示唆しているものは、何らかの一層高度な意味での可換性が物理学に必要な新しい幾何学的世界につながるドアを開くことになるかもしれない、ということのように思えます。特に、私は、代数的トポロジーの古典的な問題である球面の安定ホモトピー群に関係する構造が、そのような新しい世界への道案内となるのではないかと考えています。