



カブリ アイピーエムユー
Kavli IPMU

第11号
March 2021

$ab = -ba$

右と左の数式
が拓く世界

こんにちは
Kavli IPMU
です。

私の名前は、東京大学国際高等研究所 カブリ数物連携宇宙研究機構 (Kavli IPMU)。2007年10月1日に千葉県柏市に設立されました。ここには世界中からたくさんの研究者が集まっています。宇宙に関する5つの疑問に取り組んでいます。

- 宇宙はどのように始まったのか？
- 宇宙は何でできているのか？
- 宇宙はどんな運命を迎えるのか？
- 宇宙を支配する法則は何なのか？
- 私たちはなぜこの宇宙に存在するのか？

どれも小さいときに一度は思うような素朴な疑問ですが、答えはまだわかっていません。

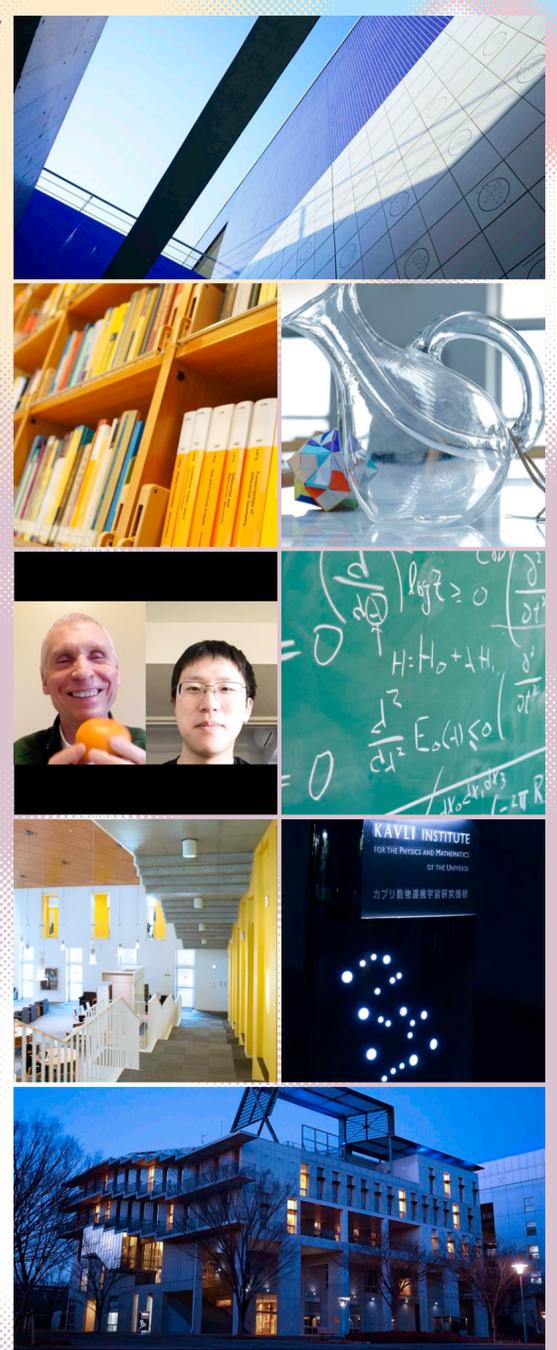
たとえば、宇宙のエネルギーのなかで、私たちが知っている物質(水素とか炭素とかです)はじつは5%にも満たないことがはっきりしています。残りの27%は得体的に「ダークマター」、さらに摩訶不思議な宇宙の68%を占めるのが「ダークエネルギー」。どちらも名前がはついていないものの、その正体はまったくわかっていません。いったい、宇宙は何でできているのでしょうか。

これらの疑問にせまるために、Kavli IPMUには数学、物理、天文などの第一線の研究者が集まり、分野を超えて共同研究を行っています。新型コロナウイルスが流行を始めるまでは、毎日、午後3時になると全員参加のティータイムがありました。異なる分野の研究者たちが顔を合わせて、おいしいお茶とパンを口にしながらおしゃべりに興じました。仲間と情報交換し、他分野の研究に触れ、思いがけない方向の議論が新しい研究のアイデアにつながりました。

そして5つの疑問を解くためには、新しい物の見方を生み出していくことが大事です。頭が柔らかく、ひとつの分野にとらわれない若い力が必要です。このKavli IPMUものしり新聞を読んでもらうことが宇宙の超難問に挑戦し、そのころには新型コロナウイルスの流行も抑えられ、私たちにぎやかなティータイムを過ごす未来が来るのが私の夢です。

東京大学国際高等研究所
カブリ数物連携宇宙研究機構 (Kavli IPMU)
〒277-8583 千葉県柏市柏の葉5-1-5
HP <http://www.ipmu.jp/ja>
Facebook <https://www.facebook.com/KavliIPMU/>
Twitter @KavliIPMU

【問い合わせ先】
TEL 04-7136-4940
FAX 04-7136-4941
MAIL inquiry@ipmu.jp



数学者になるにはどうすればいい？

興味を持ったことについて、自分自身で勉強することです。

今の研究の役に立っている教科は何？

物理、哲学。

おすすめ教科書は？

オライの「無限解析入門」です。

もっと勉強しておけば良かったと思う教科は何？

哲学、歴史。

宇宙人っていますか？

人間とは別の形態でなら、いると思います。

好きな数式は？

難しいですね。

他分野の研究をどのくらい知っていますか？

多少の物理学分野と、いくつかの数学分野については詳しいです。

自分が研究者に向いていると思うのは、どんなところ？

好奇心、根気強さ。

自分が研究者に向いていると思うのは、どんなところ？

夢見がちなところ。

好きな食べ物と嫌いな食べ物は？

野菜が好きです (トマト、きゅうり、ブロッコリー)。甘いものはあまり好きではありません。

QIO 研究者へ10の質問!

数学者になるにはどうすればいい？

わかりません。進む道は人により異なります。

今の研究の役に立っている教科は何？

物理。

おすすめ教科書は？

何冊か違う本を読んで、その分野を包括的に理解することをお勧めします。

もっと勉強しておけば良かったと思う教科は何？

物理。

自分が研究者に向いていると思うのは、どんなところ？

考えるのが好きなおところ

宇宙人っていますか？

はい。宇宙に我々しかないとは考えにくいです。

好きな数式は？

ニュートン・ライプニッツの公式。

理由は、微積分の柱となるものだからです。

化学や生物学については全く詳しくないです。計算機科学については基礎的なことは少しわかります。

他分野の研究をどのくらい知っていますか？

自分が研究者に向いていると思うのは、どんなところ？

考えるのが好きなおところ

自分が研究者に向いていると思うのは、どんなところ？

完璧を追い求めてしまうところ

好きな食べ物と嫌いな食べ物は？

中華料理が一番好きです。アメリカの料理が嫌いです。

QIO 研究者へ10の質問!

写真は新型コロナウイルス流行の影響で、インタビューをオンラインで行ったものです。



第11号
March 2021

2021年3月31日発行
発行所 東京大学国際高等研究所
カブリ数物連携宇宙研究機構 (Kavli IPMU)
〒277-8583
千葉県柏市柏の葉5-1-5
電話 04-7136-4940
FAX 04-7136-4941
http://www.ipmu.jp/ja

ab

「 ab 」一見すると不思議な数式だが、数学や物理学にとって非常に重要な関係をあらわした式だと Kavli IPMU の数学者カプラノフさんとディンさんはいう。

この式はある関係をあらわしている、 a や b に代入されるのが普通の数とは限らない。右や左など空間の向きもあらわすことができる。

数学的には座標の並び順を操作することで、右や左など空間の方向付けができるという。冒頭の式 $ab=ba$ に付いているマイナス符号が、空間の向きに対応している。たとえば右巻きの巻貝と左巻きの巻貝とは、どちらをどう動かしてもぴたりと重なることはない。このように重なり合わないものどうしの関係を、一方はプラスとしてもう一方はマイナスとしてあらわすことができるのだ。これは空間をあらわす x, y, z の座標の並び順を変えるという操作に対応している。

また $ab=ba$ の式で、 a にも b にも B を代入すると $BB=BB$ となり、右辺を左辺に移項して 2 で割ると、 2 乗したものが 0 であるという関係式 $B^2=0$ が現れる。この式は操作を2回すると 0 になることをあらわし(コラム参照、カプラノフさんとディンさんの研究における道具でもある「ホモロジー代数」)にとって重要な考え方につながるものだという。

$B^2=0$ が関係するのは数学だけにとどまらない。物質を作る粒子(フェルミ粒子)は同じ場所に2つ存在できないという決まり(パウリの排他律や、超対称性といった物理学の世界にも関係するとカプラノフさんはいう。一見すると不思議ではあるが単純な $ab=ba$ という数式は、数学や物理学にとって欠くことのできない重要なことをあらわしているのである。

***2 フェルミ粒子**

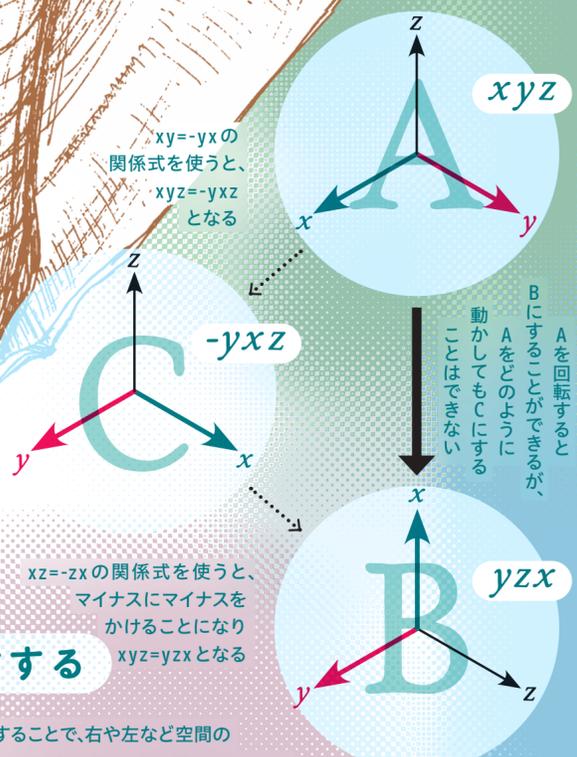
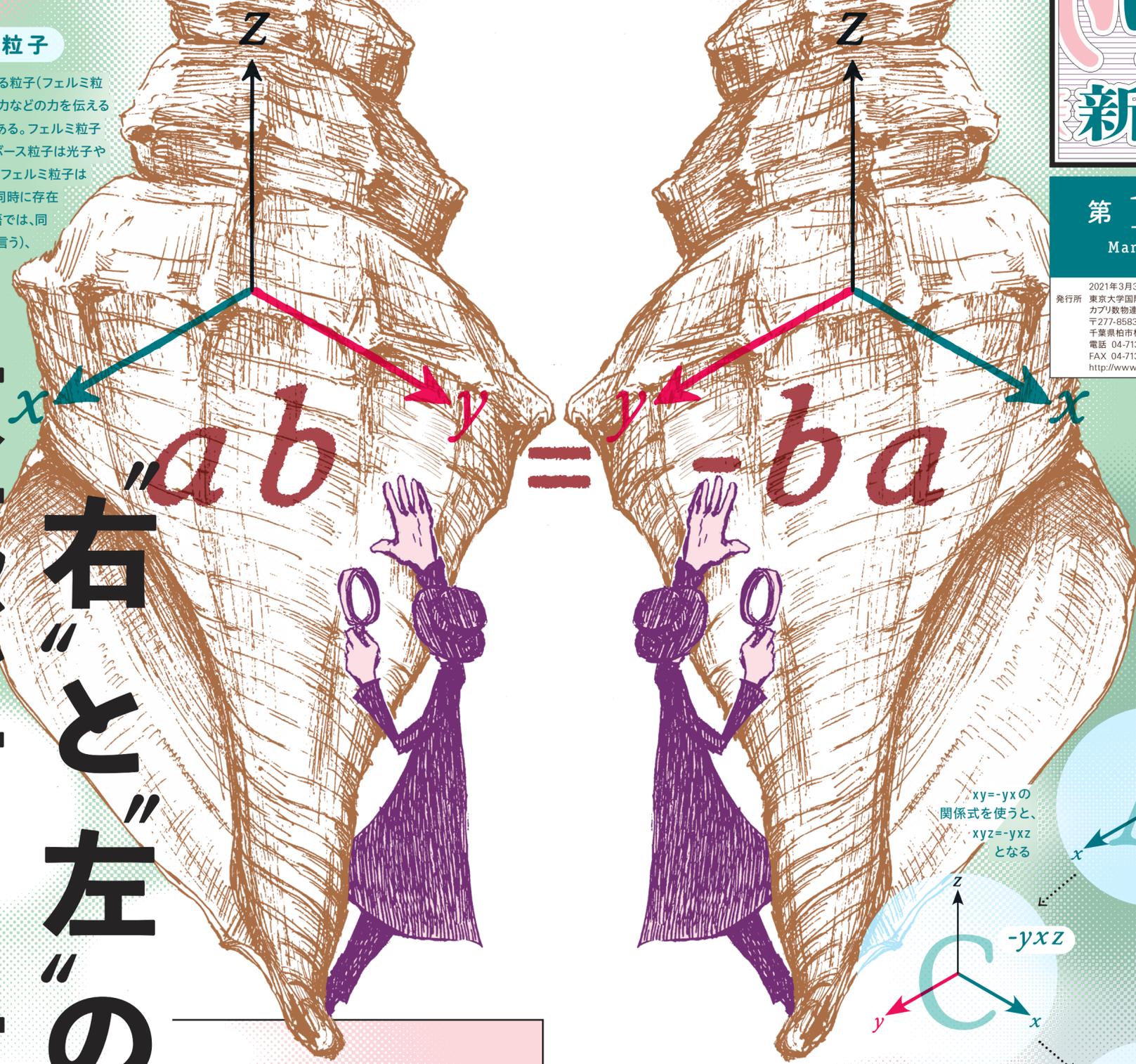
自然界には物質を作る粒子(フェルミ粒子)と、電磁気力や重力などの力を伝える粒子(ボース粒子)がある。フェルミ粒子は陽子や電子など、ボース粒子は光子や重力子などのことだ。フェルミ粒子は同じ場所に2つ以上同時に存在できないが(物理用語では、同じ状態を取れないと言う)、ボース粒子は同時に存在できる。

数式が拓く世界の「右」と「左」

$B^2=0$
が示すこと

$B^2=0$ という関係式は、同じ操作を2回すると0になるという関係をあらわしている*。たとえば正方形の場合、四辺を構成する線が正方形の内と外を分ける境界になっている。正方形の中の人を外に向かうと境界である辺(線)に突き当たる。しかし、線の上をずっと歩いていっても境界に突き当たることはなく、4辺の上をぐるぐる進み続けられる。つまり正方形の境界である辺自体には境界がないのである。このように「境界について2回考えると境界がない($=0$)」ということも、2乗すると 0 ($B^2=0$) になるという関係式はあらわしている。

*BはBoundary(境界)の頭文字



***1 座標の並び順を操作する**

数学には、座標の並び順「オーダー(順序)」を操作することで、右や左など空間の方向付け「オリエンテーション(向き付け)」を記述する方法がある。右上の図で、たて・横・高さをあらわす xyz の座標軸を右に回転させてみよう。 xyz は yzx に重ねられる。それに対して xyz と yxz は、どのように回転させても、もう一方のような並び方にはならない。この違いは、回転させることでお互いに重ねられるものどしはオリエンテーションがプラス、重ねられないものどしはマイナスとして、区別することができる。オリエンテーションを考えると、 $ab=-ba$ という式が役に立つ。この式の中の a と b が座標軸をあらわすものと考えて、 a に x を、 b に y を代入すると $xy=-yx$ となり、2つの軸の順番を入れ替えると符号が変わることを示している。図に出てくる xyz と yxz の関係を調べると、 $yxz=-xyz$ となり、 yxz と xyz の符号は違っていて、オリエンテーションがマイナスである(お互いに重ねられない)ことを示している。また、 yzx と yxz をくらべると、 x と z が入れ替わっていることから $yzx=-yxz=xyz$ 、つまり xyz と yzx の符号は同じとなり、オリエンテーションがプラスである(重ねられる)ことを示している。右巻きの巻貝と左巻きの巻貝の関係は、 xyz と yxz の関係と同じだ。このような関係は数学で「グラスマン代数」として抽象化されている。