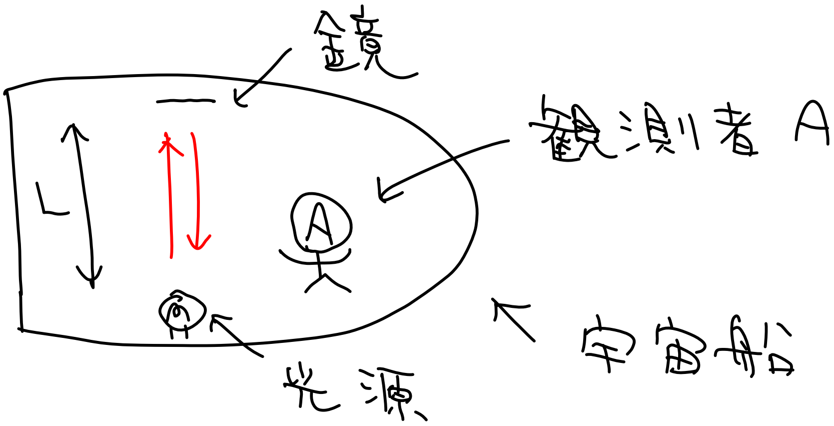
③ 時間のおくれ

次のような装置を用意

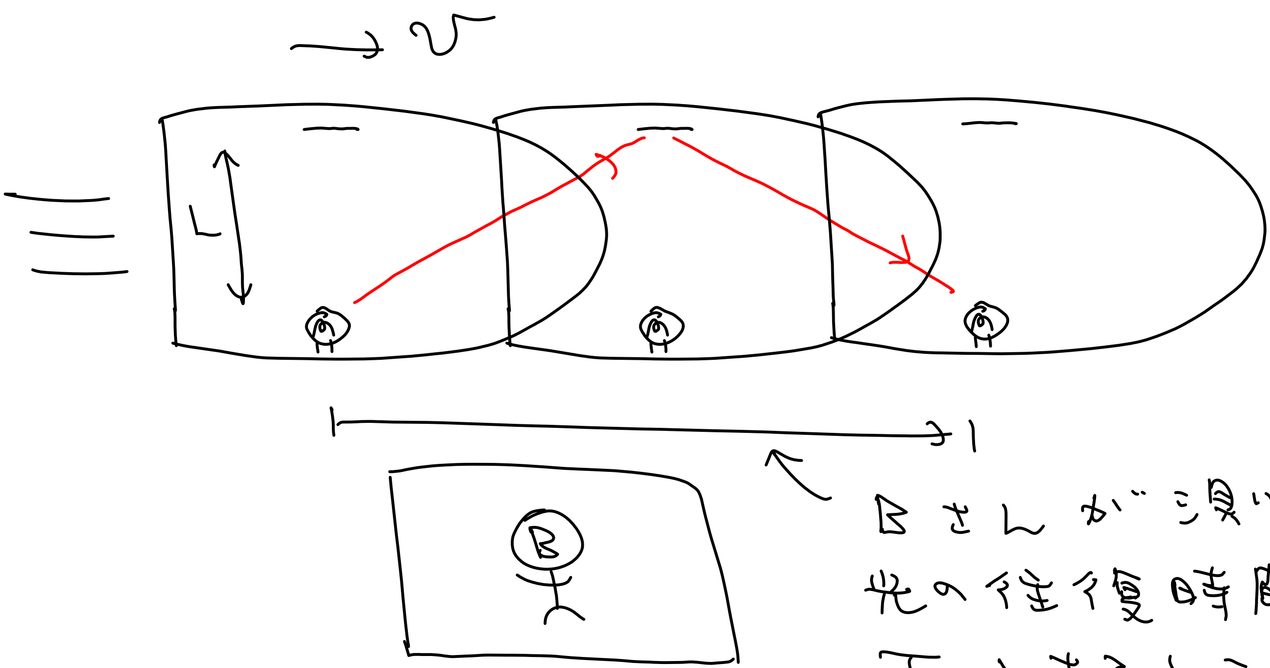


光の速さを c （≒ 30万km/s）とかく

光が往復するのにかかる時間 T_A

$$T_A = \frac{2L}{c} \quad \text{――― ⓐ}$$

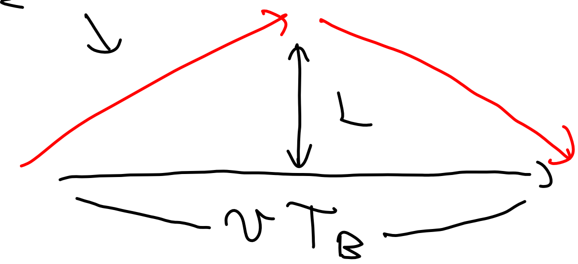
宇宙船が速さ v で動いていたとする。



Bさんが測った光の往復時間を T_B とするとこの長さは vT_B

Bさんが見ると光の進む道のりは

$$\sqrt{L^2+\left(\frac{vT_B}{2}\right)^2}$$



往復で

$$2\sqrt{L^2+\left(\frac{vT_B}{2}\right)^2}$$

光の速さはcなので

$$2\sqrt{L^2+\left(\frac{vT_B}{2}\right)^2} = cT_B \quad \text{——} \ \text{ⓑ}$$

ⓐを使ってLを消去

$$2\sqrt{\left(\frac{cT_A}{2}\right)^2+\left(\frac{vT_B}{2}\right)^2} = cT_B$$

両辺2乗

$$4\left(\frac{c^2T_A^2}{4}+\frac{v^2T_B^2}{4}\right) = c^2T_B^2$$

$$\therefore \ T_A^2 = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)T_B^2$$

$$\boxed{T_A = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ T_B} \quad ☆$$

光が往復するのにかかった時間

Aさんにとっては T_A

Bさんにとっては T_B

上の公式☆によると

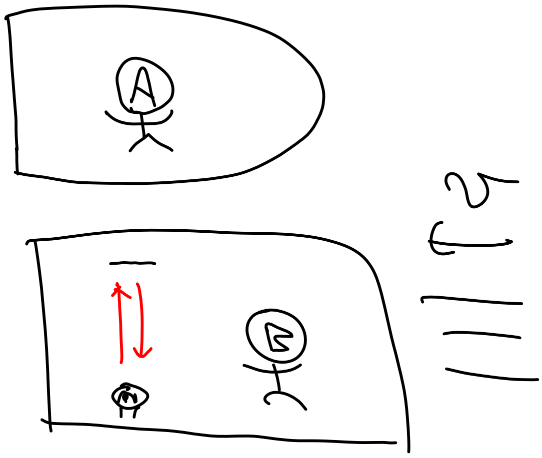
$v < c$ として. $T_A < T_B$!

BさんからみるとAさんの時計

がゆっくり進んで見える!

v	300km/h	光速の50%	99%
$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$	ほとんど1	0.87	0.14

逆にAさんからBさんを見ると



Bさんの宇宙船で光を往復させてかかった時間を測ると

Aさんから見た往復時間 $T_A^{\blacktriangleright}$

B 〃 $T_B^{\blacktriangleright}$

は公式☆によって

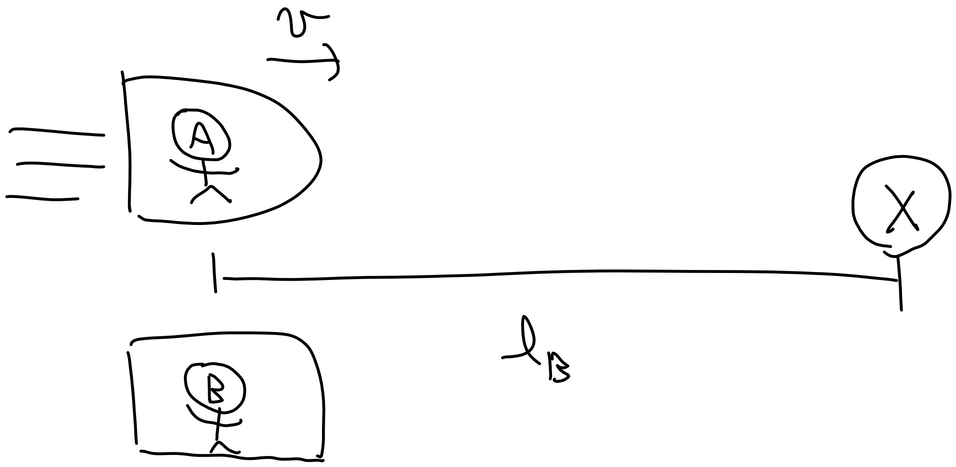
$$T_B^{\blacktriangleright} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ T_A^{\blacktriangleright}$$

つまり、AさんからみるとBさんの時計はゆっくり進んで見える！

時間の進み方は相対的！

見る人と相手の関係による

④ 長さの収縮



Bさんにとってキョリ l_B のところに
静止している物体Xまで
Aさんが速さvで飛行したとする。

◎ Bさんから見ると、到達するのに
かかる時間 T_B は

$$T_B = \frac{l_B}{v}$$ である。

この時、Aさんの時計は

$$T_A = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, T_B$$ だけ進んでいる。

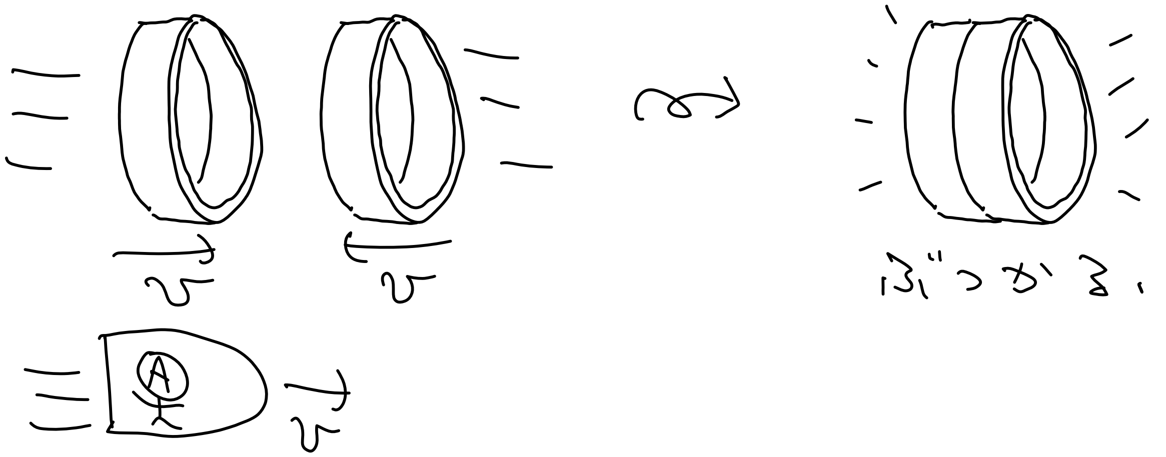
◎ Aさんから見ると物体Xが
速さ v で近づいているので
Aさんが見た物体Xまでのキョリは

$$l_A = v T_A = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, l_B$$

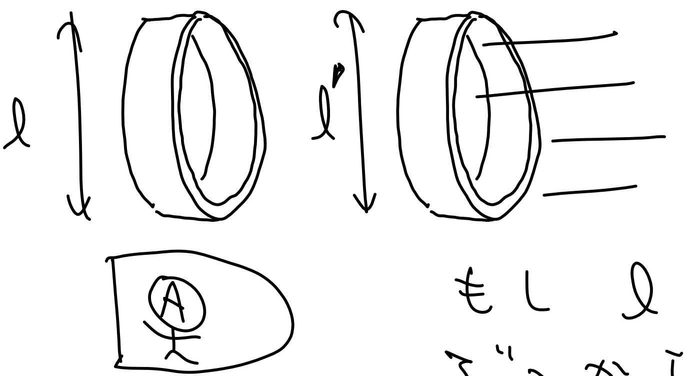
長さが縮む！

㊟ 進向方向の長さは縮むが、進向方向に垂直な方向の長さは変化しない。

理由：2つの同じサイズのリングを下図のように正面衝突させる。

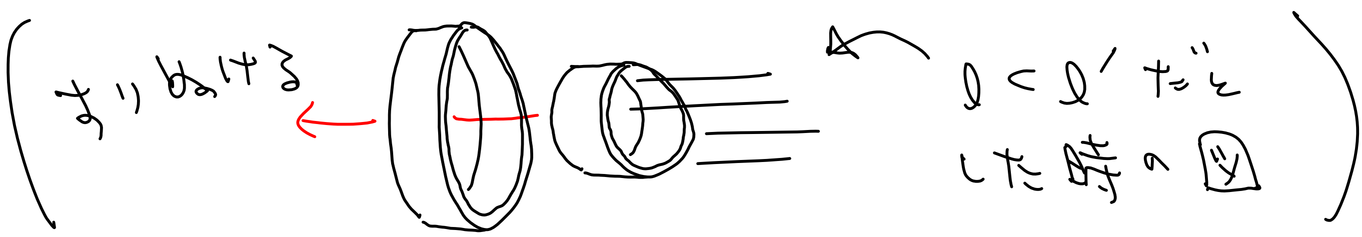


その様子をAさんが見ると



左のリングは止まっていて右のリングが向かってくる。

もし $l \neq l'$ だとすると、ぶつからずにすりぬけてしまう。

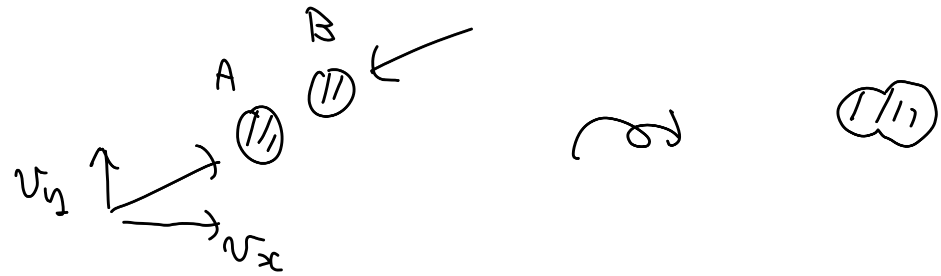


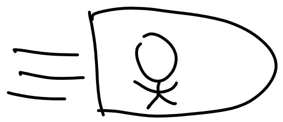
実際にはぶつかるはずなので $l = l'$ なはず。

つまり、進向方向に垂直な方向の長さは止まっていても動いていても同じ //

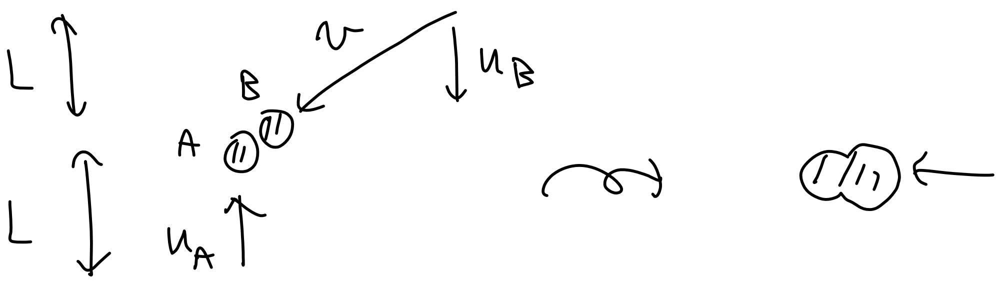
⑤ 質量の増加

2つの同じ質量の物体が正面衝突してくっつく様子を観測する。





v_xで右に走る人から見ると、



物体 A, B に時計をつけておく

u_Aやu_Bはvに比べて十分小さいとすると

Aの時間のおくれの効果は無視できるが

Bの時計はゆっくり進む。

Bの時計の進むスピードは

Aの時計の進むスピードの$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$倍

上図のように縦方向に L だけ進む間にそれぞれの時計の針の進む量は同じはずなので、u_B は u_A の $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 倍

$$u_B = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, u_A$$

運動量保存の法則

$$m u_A = m u_B$$

が成立しない？

質量が速さ v によって変化するとしてみる。

$$m(u_A)\, u_A = m(v)\, u_B = m(v)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, u_A$$

$u_A \to 0$ の極限を考えて

$$\boxed{m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

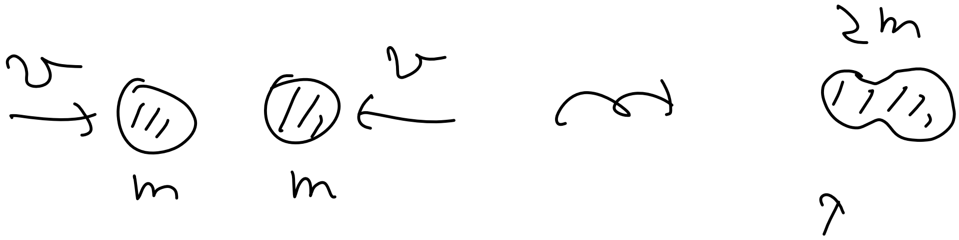
$m_0 = m(0)$
静止質量

走ると質量が大きくなる！

⑥ エネルギーと質量の関係

高校で習うエネルギー(運動エネルギー)

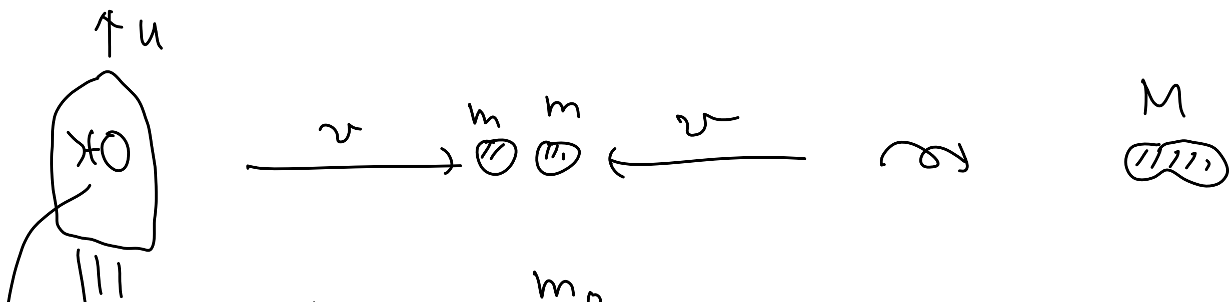
$$E = \frac{1}{2} m v^2$$



エネルギー $\left(\frac{1}{2} m v^2\right) \times 2$

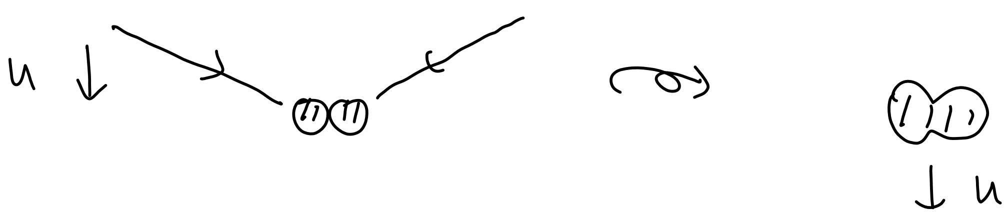
は熱エネルギーなどとして

蓄えられる。



$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

この人から見ると



$\Rightarrow$ 運動量保存則から

$$2mu = Mu$$

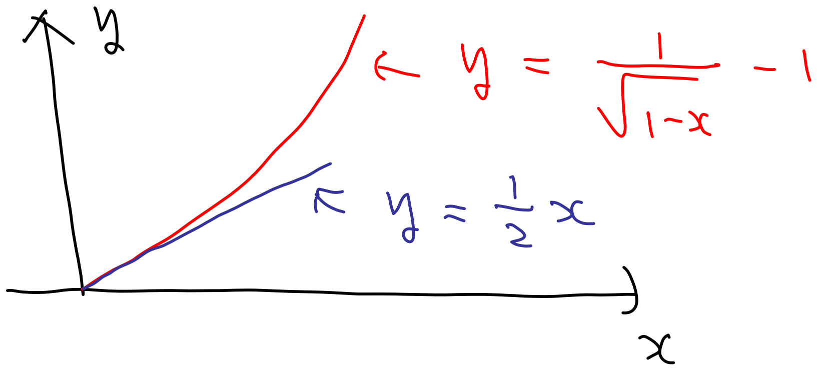
$\Rightarrow$ $M = 2m$ 　　質量保存の法則

$(u \ll v$ として$)$ $= 2 \times \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

速くぶつけるほど重くなる!

◎ 質量の増加分は

$$M - 2m_0 = 2m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$



$v^2 \ll c^2$ のとき、$\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \fallingdotseq \dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2}$

として良い近似になる。

$\Rightarrow$ $Mc^2 - 2m_0c^2 \fallingdotseq 2 \times \frac{1}{2} m_0 v^2$

$(v^2 \ll c^2)$ 　　エネルギー

投入したエネルギーに比例して
質量が増加する。

$$\Longrightarrow \boxed{E = mc^2}$$

と考えるとエネルギー保存則が成り立ち
高校で習うエネルギー保存の法則が
$v^2 \ll c^2$ の場合の近似式として導かれる。

静止質量 m_0 で速さ v で運動する
物体のエネルギーは

静止エネルギー

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \fallingdotseq m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

$v \ll c^2$ のとき

運動エネルギー