Kavli IPMU 准教授 戸田 幸伸
とだ・ゆきのぶ
専門分野：数学

極小モデル理論、連接層の導来圏、ミラー対称性

代数多様体の分類理論

数学の専門分野の一つに、代数幾何学と呼ばれる分野があります。代数幾何学とは、幾つかの多項式の解集合として定義される図形（代数多様体）を研究する学問で、例えば直線、円、放物線（図1）といった図形は代数多様体の例となります。扱っている対象は図形なので、幾何的な直感を用いて研究することもできますが、多項式で定義されているという点に着目して代数的なアプローチも可能です。また、代数幾何学は整数論や超弦理論など様々な分野と関わりをもちます。例えば、整数論におけるフェルマーの最終定理の証明には楕円曲線と呼ばれる代数多様体が活躍しますし、超弦理論においては3次元カラビ・ヤウ多様体が余剰次元に出現すると考えられています。日本では代数幾何学は代数多様体の分類理論を中心に発展してきました。日本におけるフィールズ賞受賞者（小平邦彦氏、広中平祐氏、森重文氏）は皆、代数多様体の分類理論に大きく貢献しています。

代数多様体の分類理論の考え方は、大雑把に説明すると以下の通りです。まず最も簡単な1次元の代数多様体を考えましょう。１次元といっても、代数幾何学では多項式の解集合を複素数まで拡張して考えるので、実際に絵に描くと2次元の曲面（図2）が現れます。例えば上記の直線、円、放物線といった代数多様体は解集合を複素数まで拡張すると幾つかの穴の空いた球面になります。この穴を埋める操作をコンパクト化するといいますが、コンパクト化すると直線、円、放物線は全て球面になります。この球面は有理曲線といって、最も基本的な1次元代数多様体です。また楕円曲線は3次式で定義される1次元の代数多様体ですが、これに対して上記の操作を施すとドーナツ状の曲面ができます。全ての1次元代数多様体はこのように幾つかのドーナツ状の穴が開いた球面になることが知られています。ドーナツ状の穴の個数は種数と呼ばれますが、1次元の代数多様体はその種数が0の場合（球面）、1の場合（楕円曲線）、2以上（一般型）の場合に応じてそれぞれ複雑さの度合いが違います。そこでまずは上の3通りのいずれに属するのか決定してから、その代数多様体の幾何的構造を調べましょうというのが分類理論の考え方です。

2次元代数多様体の極小モデル理論

より高次元（2次元以上）の代数多様体の場合は、1次元の時と同様にドーナツ状の穴の数で分類することはできません。その代わりに高次元では（通常の次元とは異なる）小平次元と呼ばれる不変量を用いて分類されます。高次元代数多様体においても、その小平次元の値に応じて幾何構造の複雑さの度合いが異なるので、まずは小平次元の値を知ることが分類の鍵となります。しかしながら、高次元代数多様体の大域的な幾何構造は複雑な形をしていて、小平次元が分かっても1次元の場合のように単純に分類することはできません。その要因を探っていくと、代数多様体上に悪い振る舞いをする余分な有理曲線が存在しているからで

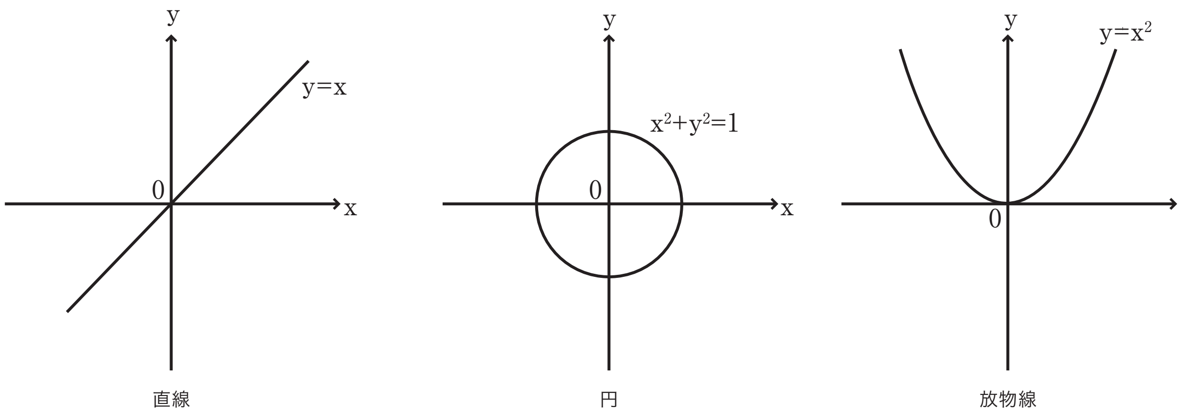


図1

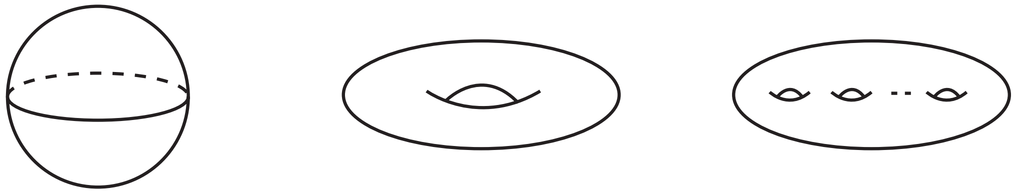
あることが分かります。そこで、その余分な有理曲線を潰して新たな代数多様体を得ることを考えます。この操作を繰り返して、余分な有理曲線がない代数多様体（極小モデルと呼ばれる）を得ることができるなら、その極小モデルの大域的な構造を調べて代数多様体を分類しましょうというのが高次元における分類理論の考え方です。このように余分な有理曲線が存在しない極小モデルを見つけてくる操作は極小モデルプログラム（Minimal Model Program、略してMMP）と呼ばれています。

2次元代数多様体のMMPは20世紀初頭にイタリア学派によって完成されました。この場合、極小モデルを更に詳細に分類することができます。例えば小平次元が0の極小モデルはK3曲面、エンリケス曲面、アーベル曲面、楕円曲面と4種類に分類され、それぞれ背後に興味深い幾何学が存在します。中でもK3曲面は前述した楕円曲線や3次元カラビ・ヤウ多様体の2次元における類似物と考えられ、その幾何学は格子の理論と密接に関わっています。また、後述するK3曲面のミラー対称性も格子の言葉で記述できるため、ミラー対称性のトイモデル（簡単なモデル）として現在でも活発に研究が進められています。

3次元代数多様体の極小モデル理論

上で述べたとおり、2次元代数多様体の極小モデル理論は非常に美しい形で完成されました。ところが3次元代数多様体に対して同様の理論を構築しようとすると、2次元の場合には発生しない重要な問題点が浮かび上がります。それは、悪い振る舞いをする余分な有理曲線を潰してしまうと、潰した先の代数多様体に特異点が生じてしまうことです。ここで代数多様体が特異点をもつとは、局所的に座標系を取ることができないという意味です。例えば前述の1次元代数多様体の場合にはドーナツ状の曲面になっているので、局所的に（実）2次元座標を取ることができます。代数幾何で扱う代数多様体は必ずしもこのような座標系が取れるとは限らず、例えば円錐のように尖った空間を考えると頂点の近くで座標系を取ることができません。特異点を持った代数多様体の幾何学は難しく、暫くの間は3次元極小モデル理論の進展は滞っていました。

上記の問題点は1980年代に取り除かれ、3次元極小モデル理論が大発展します。森重文氏、川又雄二郎氏、V.V. Shokurovらを中心として3次元MMPが機能する比較的マイルドな特異点（端末特異点と呼ばれる）の概念が整理され、それらの特異点の解析が進みまし



種数　0
（有理曲線）

種数　1
（楕円曲線）

種数　≧2
（一般型）

図2

た。端末特異点しかもたない3次元代数多様体に対しては、余分な有理曲線を潰すことができます。仮に潰した結果得られた代数多様体も端末特異点しかもたないなら、プログラムを進めることができます。実際はフリップ曲線と呼ばれる非常に厄介な有理曲線を潰すと端末特異点の範囲から外れてしまうのですが、その場合はフリップ曲線を取り除いて別の有理曲線に置き換える操作（フリップと呼ばれる）を行うことでプログラムが進んでいくことが示されました。このフリップの存在が大問題だったのですが、1988年に森重文氏によってフリップの存在が示され、3次元極小モデル理論が完成されました。

3次元極小モデル理論の特徴の一つに、得られた極小モデルが唯一つには定まらず、高々フロップと呼ばれる操作で移りあうということがあります。フロップとはフリップと良く似ている操作で、フロップ曲線と呼ばれるフリップ曲線ほど厄介ではない有理曲線を取り除いて別の有理曲線に置き換える操作です。このフロップという操作で様々な幾何的情報が保たれることは知られていましたが、1990年代にその究極とも呼べる現象が発見されました。3次元フロップによって連接層の導来圏が同値になるという現象です。これはA. BondalとD. Orlovによって特殊なフロップの場合に証明され､T. Bridgelandによって全ての3次元フロップで成立することが示されました。

連接層の導来圏

代数多様体の連接層の導来圏とは1960年代にA. Grothendieckによって導入された概念です。連接層の導来圏について説明するために、まずは連接層について大雑把に解説します。連接層とは、代数多様体上の関数の概念を抽象化した概念です。例えば代数多様体上で局所的に多項式の形で書ける関数全体を考えると、それは構造層という一つの連接層を与えます。しかし連接層はこれだけではなく、例えば代数多様体の部分代数多様体上の構造層も一つの連接層を与えます。代数多様体上には多くの連接層が存在するのですが、一つ一つの連接層を「対象」とし、更に二つの連接層を関係づける「射」を考えることで、連接層全体に一つの数学的体系を与えることができます。イメージとしては、連接層全体とそれらの間の射を、点の集合とそれらの間の矢印として捉えると良いでしょう。この様に「対象」及びそれらの間の「射」の概念が存在する数学的な体系は「圏」と呼ばれています。

連接層の圏は上の様に定義することができますが、この圏はこれだけではあまり良い性質をもたないことが分かります。例えば二つの代数多様体の間に写像が存在した時に、一方の代数多様体上の連接層から他方の代数多様体上に連接層を与えることを考えましょう。この時、単純にその様な操作を行うと情報が失われて

しまうことがあるのです。そこでGrothendieckが考案したのは、連接層ではなく連接層の複体を考えるということです。連接層の複体を前述の点と矢印の例に例えて説明します。まずは幾つかの有限個の点に1, 2, 3・・・と番号を振り、それぞれの番号の点からそれより1つ大きい番号の点に向けて矢印を引きます。番号付けした点に連接層を対応させ、矢印に連接層の間の射を対応させます。このような図式である特別な性質を持つものを連接層の複体と呼びます。連接層の導来圏とは,対象が連接層の複体からなる圏のことです。射についてはもう少し難しいので、ここでは解説しません。連接層の導来圏を考えると、上述の問題点がクリアできます。つまり、一方の代数多様体上の連接層から他方の代数多様体上に連接層を与える際、代わりに導来圏の対象を与えると情報が失われないのです。

さて、導来圏についてはこれまで非常に技術的な話をしてきました。元々、導来圏とは連接層の圏を考えるだけでは不足だった技術的な点を解消するために導入されたので、それが代数多様体の幾何学と関連しているとは当初全く考えられていませんでした。こうした考え方が変わったのが1994年のことです。

ミラー対称性と極小モデル理論

1994年、チューリッヒで開催された世界数学者会議において、M. Kontsevichがホモロジカル・ミラー対称性予想を提唱しました。これは、代数多様体の連接層の導来圏と、それとミラー対称の関係にあるシンプレクティック多様体から定まる深谷圏と呼ばれる圏が等価であるという予想です。背景となったアイデアは、超弦理論における対称性、及び導来圏の対象、深谷圏の対象をそれぞれタイプの異なるD-ブレインとみなすということです。導来圏の様に技術的かつ抽象的な数学的対象が超弦理論と関わるというのも驚きですし、また代数幾何学とシンプレクティック幾何学という全く様子が異なる幾何学理論の等価性が予言されたのも驚きでした。

ホモロジカル・ミラー対称性の提唱以降、導来圏は代数多様体の間に存在する対称性を本質的に実現する数学的対象であると認識されるようになりました。またミラー対称性を通じて、異なる代数多様体の間の導来圏の同値も予言されるようになり、代数幾何学に新たな視点、問題をもたらすことになりました。上述のフロップによる導来圏の同値も、ミラー対称性から予言された予想です。3次元フロップの場合にはこの予想は既に解決済みですが、より高次元の場合には特別な場合を除いて未解決で、完全な証明には新たなアイデアが求められています。

フロップによる導来圏の同値のアイデアを更に推し進めて、MMPの各ステップで導来圏がどのように振る舞うかを調べるのは自然な考え方です。MMPのステップの特別な場合では、Bondal-Orlovや川又雄二郎氏らによって導来圏が小さくなるという現象が観察されています。そこで、MMPは導来圏を小さくする操作であり、極小モデルが一意的ではなくても導来圏のレベルでは一意的に定まるということが期待できそうです。ここで述べたことを特別な場合に限らず一般の場合に示すには、特異点を持った代数多様体の導来圏をどのように扱うのかという問いに答えなければいけないため、非常に難しい問題です。しかしこのアイデアが実現されたら、極小モデル理論の新しい視点をもたらすのみならず、様々な応用も期待できそうです。

現在私は少し見方を変えて、MMPの各ステップを出発点の代数多様体の導来圏の対象の集まりの空間（モジュライ空間と呼ばれる）として理解できないかと考えています。キーワードは、2002年にBridgelandによって導入された導来圏の安定性条件の概念で、これも超弦理論に端を発する概念です。現時点では満足のいく形の結果は得られてはいませんが、このアイデアが実現されれば量子不変量やミラー対称性等、様々な方向への応用が見込めると考えています。このように、かつては純粋に代数多様体を分類しようとして発展した極小モデル理論が、超弦理論や導来圏を通じて様々な研究分野と結び付き、新たな進展を迎えようとしています。