

ホモロジー的射影双対と量子ゲージ理論

堀 健太郎 ほり・けんたろう

Kavli IPMU 教授

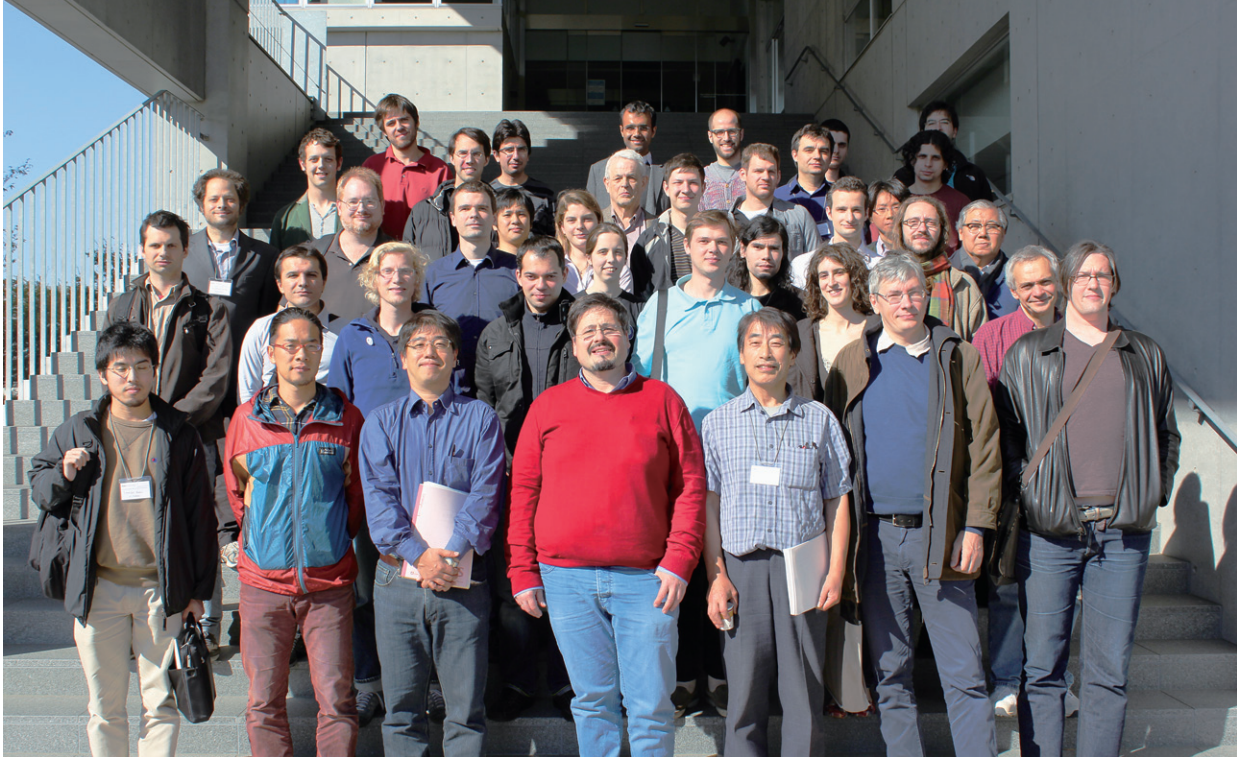
近年、数学の一分野と物理の一分野の間に、魅力的かつ実りの多い相互作用が起こっています。物理の研究は数学的な予想を生み出し、数学者たちはそれに証明を与えようと頑張っています。一方、数学における結果は物理学者たちの好奇心をそそり、時には新発見につながっています。2012年11月12日から16日に開催されたこのワークショップはそのような相互作用の真ただ中で、中心人物の多くが参加する形で行われました。

当該の分野とは数学においてはホモロジー代数に基づく代数幾何学、物理においては2次元の超対称量子ゲージ理論です。相互作用のきっかけは、弦理論における「Dブレーン」と呼ばれる対象を記述するのに数学における「圏」の言葉がとても良く当てはまると認識したことにあります。Dブレーンとは弦の世界面の境界上の相互作用のことであり、それらの全体は、開いた弦の状態を「射」とするようなある種の「圏」を構成します。これは数学的な研究の対象となり得るもので、しばしば「接続層の導来圏」のような以前から調べられていたものと一致します。一方、世界面上の場の理論を構成、解析する極めて強力な方法として「線形シグマ模型」と呼ばれる2次元の超対称ゲージ理論があります。この対応関係を通じ、2次元ゲージ理論において知られている事実は圏に関する帰結を生み出し、また、圏に関する結果から2次元ゲージ理論を理解するためのヒントを得ることができます。以下に本研究会の動機となった二つの例を述べることにします。

(1) 超対称性の一般原理により、Dブレーンの圏（正確には「BタイプのDブレーンの圏」）は理論の（ケー

ラー）パラメータを動かしても変化しないことが知られています。このことから（ケーラー）モデュライ空間の相異なる領域に対応するDブレーンの圏は同値であるはずだという数学的帰結が導かれます。2005年にオルロフはそのような圏同値の例を証明することに成功しました。彼は射影超曲面 $f = 0$ の接続層の導来圏が f の（次数付きで同変な）行列分解の圏と同値であることを示したのです。この証明に動機づけられて物理学者たち（ヘルプスト-ページ-筆者）は線形シグマ模型におけるDブレーンを調べ、モデュライ空間の相異なる領域を自由に行き来するための境界電荷に対する条件として「次数制限則」を発見しました（2008年）。この物理の結果は今度は数学者たちを刺激し、彼らは「次数制限則」を数学的に定式化し、我々が考えていたよりもずっと一般的な状況に拡張しました（ハルパーンライストナー、バラード-ファヴェロ-カツアルコフ、ドノヴァン-シーガル、2012年）。

(2) 1998年ノルウェーの数学者ロドランドが奇妙な論文を書きました。ある二つの異なるカラビ-ヤウ多様体 (X と Y としましょう) がミラーとして同一のピカル-フックス方程式を持つ、というのです。筆者はその論文のことを2003年にファン・ストラタンから教わり、友人のトン氏と共にモデュライ空間の二つの領域に X と Y が対応するような線形シグマ模型を構成することにより説明しようと試みましたが、2004年から2006年にかけての仕事で成功しましたが、それは非可換ゲージ理論の低エネルギー物理について理解することを伴う高度な作業でした。その最中にウィッテンは、我々の試みがうまくいくのであれば X と Y は



導来同値であるはずだということを指摘しました。このことを双有理非同値かつ導来同値な多様体の例を探していたカルダラルに伝えたところ、ほどなくして彼はポリソフと共に導来同値性を証明することに成功しました(2006年)。そこで明らかになったのはこの圏同値がクズネツォフの提唱する「ホモロジー的射影双対」の一例となっているということでした。(クズネツォフ本人もこの圏同値を独立に証明しています。)その後、 X と Y のような組は2007年にカルダラル、ディストラ、ヘラーマン、パンテフ、シャープのグループにより、また2011年には細野と高木により発見されました。筆者はこれらの新しい例を線形シグマモデルにより説明しようと再び試みました。前回と同様に非可換ゲージ理論の低エネルギー物理について理解することが必要でしたが、今回は更に高度なレベルの理解が要求され、遂には2次元超対称ゲージ理論における双対性の発見に至りました(2011年)。これは4次元のサイバーク双対性と似たタイプのものです。この双対性はこれまで知られている導来同値の多くを統一的理解する枠組みを与え、さらに新しい例も生み出します。この夏モスクワで筆者はクズネツォフと意見交換し、ゲージ双対性から出てくる圏同値の全体と

ホモロジー的射影双対には著しい重なりが見られること、また、微妙な違いも存在すること、を確認しました。

本ワークショップには40人近くの数学者と物理学者が参加しました。上記に名前のがった人々の多くは、ホモロジー代数、代数幾何学、超対称ゲージ理論に関する別の重要な問題に取り組んでいる人々が来ました。これらの人々が一堂に会し、アイデアを交換した素晴らしい機会であったと思います。この相互作用が我々をどんどこに導いてくれるのか非常に楽しみです。

本ワークショップの組織委員はマイアミ大学とウイーン大学兼任のルドミル・カツアルコフ氏と筆者が務めました。また日本の文部科学省(科研費:超弦理論のコンパクト化における数学と物理学のコラボレーション)、ヨーロッパ研究諮問会議(一般化されたミラー対称性)、ロシア連邦の科学省(代数幾何学とその応用に関する研究所)による援助を受けています。事務的には宇治田理恵さんをはじめとするカブリ数物連携宇宙研究機構のスタッフにより運営されました。宇治田さんの効果的かつ献身的な働きには特に感謝したいと思います。