Special Contribution

ムーンシャイン（月影）研究会

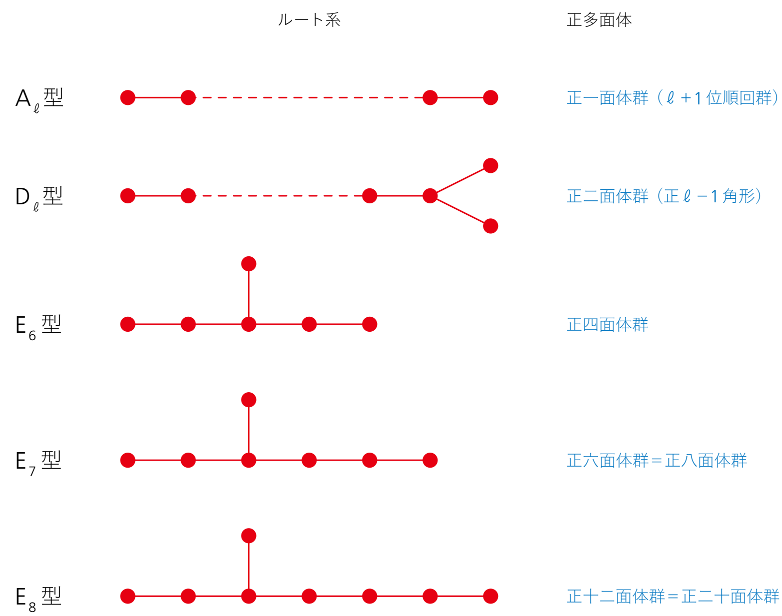
斎藤恭司 さいとう・きょうじ
IPMU主任研究員／研究会組織委員代表

人が世界を認識するとき、一つの手がかりになるのは対称性です。例えば人の顔は左右対称であるとか、丸い花は（上から見て）回転対称であるとかです。中でも有名なのは、本冊子の裏表紙に掲げる正多面体の持つ対称性でしょう。プラトンがこの対称性に宇宙の調和を見て取り、それらを彼の学園アカデメイアに掲げさせたとされています。驚くことに、人類がこの対称性を認識したのはそれより遥かに古く、スコットランドにある新石器時代の遺跡から、正多面体の対称性を象った丸い石が発見されています。

しかし、対称性が数学的にはっきりと群という概念（結合法則を満たし単位元を持ち、かつどの元も逆元を持つような演算体系）により定式化されたのは、ずっと時代が下り1800年代初めの頃で、特に1832年5月わずか20才数ヶ月で決闘に倒れたガロアがその前夜書き残した手稿では、群の正規部分群の概念を導入して代数方程式の可解性を完全に解明するに至っています。更にガロアはその手稿の中で、群の概念をアーベル積分の置換に応用することを示唆しています。

上記ガロアにより始まった群の構造的研究は、その後クラインやリーらにより1870年頃から幾何学にも応用されはじめ、特に1888年に始まるキリングやカルタンらによってなされた単純リー群（正確にはその中で単純織と呼ばれているクラス）の分類表は、正多面体の分類表と1対1に対応することが知られています。（対応のさせ方は何通りも知られています。特に、正多面体群の指標を用いる方法はMcKay対応と呼ばれています。）以下に、その対応表及び単純リー群を分類する際に用いられるDynkin図式というものを掲げておきます。

これとは独立に、単純群（正規部分群を使ってそれ以上分解できない群）も多くの研究者により研究され、最終的には2004年に有限要素からなる単純群の分類が完成されたとされています。その分類表には、単純リー群を用いて記述される群を含むいくつかの無限系列の群の他に、散在的に登場する群が26ほどあります。その散在群の中で一番大きい群がモンスターと呼ばれているものです（Conwayに依る命名）。もしもモンスターが存在するなら196883次元の空間の対称性として実現できることがConway、Norton、Griessらにより指摘されましたが、最終的にGriess が196883次元の非結合的な可換代数を構成し、モンスターはその対称性（自己同型群）として存在が確定したのです。



Mckayは1979年に、その問題となっている数196883＋1が楕円モジュラー関数 j のフーリエ展開 $j(z)=q^{-1}+744+196884q+\cdots\cdots$の係数として登場することを指摘しました。これがMckay Observationとして著名な発見です。楕円関数論は、1740年代のオイラーの仕事に由来して発展してきた、数学の中でも由緒ある重要な一分野ですが、それとモンスター群とが密接に関係する（かもしれない）ということで大きな反響を呼び起こします。これをきっかけにして、モジュラー関数のフーリエ係数が注目されることになり、モンスター群の共役類から楕円モジュラー関数及び群への対応（Conway-Norton対応、1979）やその事実のvertex operator algebraによる説明（Borcherds）等、矢継ぎ早にMonstrous Moonshineの名前で呼ばれる驚くべき一連の発見が続きます。

柏で行われたMoonshiney研究会は、McKayを中心にConwayやGriessらMoonshineをめぐる当事者達の集まる、気迫に満ちたものでした。私としてはMoonshine研究の新たな動きを告げるMcKay 氏の講演、更に「もう一つのMcKay対応」（モンスター群の中のFischer Involutionの積の共役類達がE_8型Dynkin図式を形成する）を対応する楕円モジュラー群を用いて説明しようとしたDuncan氏の講演に心惹かれたのでした。人類に古くから知られてきた正十二面体対称性からはじまり、E_8型の対称性を経て、新たに登場したモンスター群の対称性となってきた進化の流れが、更に将来、宇宙の最も深い所に現れる対称性に連なっていないだろうかと夢想するのは楽しいことです。

（本稿の作成にあたり、松尾厚氏及び宮本雅彦氏のご協力を得ました。）