FEATURE

Kavli IPMU 准教授 **阿部 知行**
あべ・ともゆき
専門分野：**数学**

類似と数学

1940年3月、戦争の混乱の中、兵役に就かなかったことを理由に逮捕された一人の数学者がフランス・ルーアンのボンヌ・ヌヴェール刑務所の獄中から哲学者である彼の妹に向けて14ページにわたる手紙を送った。その中で彼はこう述べている。「数論*1と（有限体上の関数体の理論と）の類似は強固であり、明らかです…一方で（有限体上の）関数体と「リーマン体」に関しては…後者から得られた知見を前者で適用したとき我々は極めて強力な手段を手にするのです…」*2 彼の名はアンドレ・ヴェイユ。後にリーマン予想*3の類似から有限体上の多様体のゼータ関数に関する驚くべき予想を提唱し、現代数学に至るまで絶大な影響力を及ぼした人物である。

§1 ヴェイユの哲学

1, 2, 3, …. 整数は誰もが慣れ親しんでいる数学の最も基本的かつ古典的な概念だろう。一方で極めて困難な研究対象であり、多くの素朴な疑問に対して現代数学は無力である。しかし、多大な努力の結果、数論の真髄に触れたとき、人々は極上の果実を手にしてきたことも事実である。

古来より数学者の興味の中心の一つは方程式を解くことであった。実用的な理由から生まれたのであろう、2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解法は古代バビロニアの時代には知られていた。時代を下り、どんどん複雑な方程式へ興味が移っていく。方程式を研究する一つの方法は方程式を図形ととらえることである。例えば、$y=x^2$ という方程式を考えよう。中学生の時にこの方程式は放物線を表すことを習ったはずである。放物線ととらえれば図形なので、幾何学的なアプローチが可能になってくる。この考えのもと、多変数連立方程式を幾何学的にとらえようとするのが代数幾何学と言われる数学分野である。これに関しては*IPMU News*でも戸田氏*4やボンダル氏*5が詳しく取り上げている。「多変数の連立方程式で定まる図形」を代数幾何学では代数多様体と呼んでいる。代数幾何学は様々な数学の交差点に位置している。代数多様体があれば、その整数解ででき

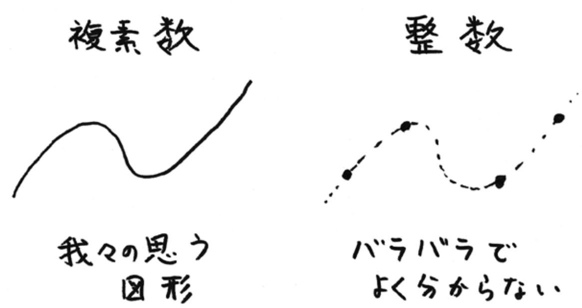


図1　代数多様体の複素数と整数の世界での実現

*1 整数論とも言われる。
*2 ここで現れる体（たい）と§2に現れる環（かん）については、コラム1を参照。有限体については§2で詳しく述べる。リーマン体とは、後で述べる複素幾何学に関連する体で、複素数体上の関数体と言われることが多い。
*3 リーマン予想については、§3で述べる。
*4 戸田幸伸、*Kavli IPMU News*, No. 20 (2012) p. 32。
*5 アレクセイ・ボンダル、*IPMU News*, No. 14 (2011) p. 32。

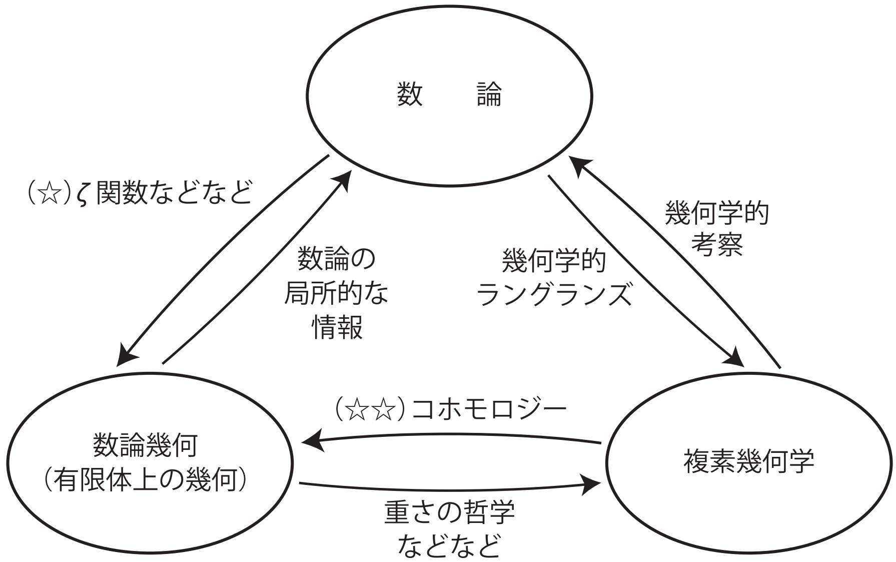


図2　ヴェイユの三位一体

る図形を考えることができる。この整数解を研究するのは数論である。一方で代数多様体の複素数解でできる図形を考えることができる。こうすると複素幾何学と結びつく。

一般的に、解を考える場所が違えば全く違う世界になってしまう。例えば複素数で考えれば、代数多様体を(高次元の)複素空間における図形と見なすことができるので、幾何学的な考察を加えることができる。一方で整数解を研究したければ解はまばらにしか存在しないので、ただそのまま考えていては我々の一般的な図形とかけ離れたものしか出てこない(図1参照)。

代数幾何という同じ土台にのっていながら全く違う世界。しかし、これらの世界の間にも我々の感覚を超える関係、類似、があり、上の図2のように三位一体で考えたとき数学の真実にたどり着けるというのがヴェイユの哲学（この哲学を主張するのは彼が初めてではないと彼自身断りを入れている）である。

§2 ゼータ関数

リーマンのゼータ関数とは

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

で定義される関数であり、定義自体はとても素朴である。この関数は19世紀中頃リーマンにより素数の分布に関する情報を持っていることが発見され、期待される究極の情報が提唱された。これを現在ではリーマン予想[*3]と呼んでいる。これは現在でも数学の中心に鎮座する最も重要な問題と言っても過言ではないが、残念ながら現段階で有効なアイディアがあるようには見えない。

整数の研究との比較対象として有限体上の多項式環の理論がしばしば考えられてきた。この理論を考察するため、まず有限体を定義しよう。p を素数とする。このとき $\{\overline{0},\ \overline{1}\ldots,\ \overline{p-1}\}$ という有限個の集合 $\mathbf{F}_p$ を考える。実は、この集合には有理数(分数で表される

Feature

数のこと）の集合と同じように四則演算を定義できる。これはとても単純なことで、足したり掛けたりしたあと p で割った余りを考えれば良いのである。例えば $p = 7$と取れば（20割る 7 の余りは 6 であるから）

$$\overline{4} \times \overline{5} = \overline{20} = \overline{6}$$

という具合に計算すれば良い。$\overline{20}$を定義しなかったので正確性に欠けるがお許し願いたい。割り算が多少問題になるが、

$$\overline{4} \div \overline{5} = ?$$

を計算したければ小学生に戻った気分で

$$\overline{5} \times ? = \overline{4}$$

となる?を見つければよいのである。答えは5となるのでご自身で計算されたい。p が素数でないものをとってもかけ算と足し算は同じように定義される。ところが、そうすると割り算は定義されない。例えば $p = 12$（これは時計の世界である）としてみれば

$$\overline{4} \times ? = \overline{1}$$

となる?は存在しないことが容易に分かる。

コラム1: 体と環

環とは足し算とかけ算が定義されている集合のことを言う。例えば整数全体（…, –2, –1, 0, 1, …）は足し算もできるしかけ算もできるので環をなしている。多項式環も環の例である。体とは、特に単純な環の一種である。正確には 0 以外の全ての元に対して、掛けると 1 になる逆数が存在する環を特に「体」というのである。有限体は体であるし、他にも有理数（つまり分数）全体や実数（小数で書ける数）全体は体である。ここで説明した「体」とは無関係であるが、「立方体」や、ここで頻繁に現れる「多様体」のように語尾に「体」のつく言葉がいろいろあり、非専門家にとっては紛らわしい。

話を戻そう。件の有限体上の多項式環 $\mathbf{F}_p[x]$とは$\mathbf{F}_p$の元（集合の要素のこと）を係数に持つような多項式全体である。たとえば $\mathbf{F}_3[x]$の1次以下の式は

$$\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ x,\ x+\overline{1},\ x+\overline{2},\ \overline{2}x,\ \overline{2}x+\overline{1},\ \overline{2}x+\overline{2}$$

の 9 個の式がある。同じように 2 次式以上も考えられるので、$\mathbf{F}_3[x]$には無限個の元がある。高校で習う多項式の足し算・かけ算と同じように$\mathbf{F}_p[x]$にも足し算・かけ算があり、さらにこれ以上因数分解できないような多項式、既約多項式が定義できる。この既約多項式はまさに$\mathbf{F}_p[x]$において素数に対応する概念である。

さて、リーマンのゼータ関数が難しすぎるのなら、整数の類似物である$\mathbf{F}_p[x]$にもゼータ関数を考えて性質を見極めようとするのは一つの案である。そのために重要な発見はゼータ関数がオイラー積表示

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

を持つことであった。これによりゼータ関数の「代数幾何学的解釈」ができるようになるのである。f を$\mathbf{F}_p[x]$の元としたとき、$\deg(f)$として f の次数を表すとする。このときこれらの類似をたどることで

$$\zeta_{\mathbf{F}_p[x]}(s) = \prod_{f:\text{既約多項式}} \frac{1}{1-p^{-\deg(f)\cdot s}}$$

と定義してみる。ここで $\zeta(s)$ の定義の p^{-s} が $\zeta_{\mathbf{F}_p[x]}(s)$ では $p^{-\deg(f)\cdot s}$に置き換わっている。これは $\zeta(s)$ の p を素数 p の“大きさ”と解釈した場合、f に対応する大きさは $p^{\deg(f)}$とするのが適当という考えからである。これで $\mathbf{F}_p[x]$ のゼータ関数が出来るわけだが、代数幾何学的には $\mathbf{F}_p[x]$ は（有限体上の）直線と考えられる。こう考え直すと $\zeta_{\mathbf{F}_p[x]}(s)$ の定義に出てくる数すべてに代数幾何的な意味づけができ、ほとんど同じ発想で有限体上の代数多様体 X に対してゼータ関数 $\zeta_X(s)$ を定義することができる。これがヴェイユの定義したゼータ関数であり、図2の三位一体の（☆）である。

§3 ヴェイユ予想

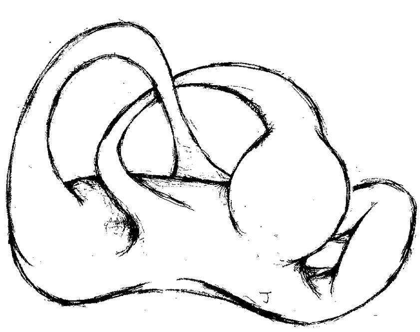
ヴェイユは $\zeta_{\mathbf{F}_p[x]}(s)$ や、もっと一般に代数曲線 C に対する $\zeta_C(s)$ を計算した。その結果、リーマンのゼータ関数とは異なり、有理関数（つまり多項式の割り算）であることを発見した。もっと詳しく言うと

$$\zeta_C(s) = \frac{f_1(p^{-s})}{f_0(p^{-s}) \cdot f_2(p^{-s})}$$

（f_n は多項式）と書ける。さらに驚くべきことに $f_n(t) = 0$ という方程式の解の絶対値は $p^{n/2}$ となっていたのである！ $n/2$という分数が出てくるのがなんとも不思議であるが、彼にはこの数字に心当たりがあった。リーマン予想である。リーマン予想によれば、リーマンのゼータ関数は1/2にのみ非自明な零点を持つことが予想されており、この形にぴったりはまるのである。リーマンのゼータ関数に対するリーマン予想は難しすぎてなかなか太刀打ちできないが、有限体上の代数曲線のリーマン予想類似はヴェイユによって定式化され証明されたのである。

これにとどまらずヴェイユは、$f_n(t)$には幾何学的な情報が含まれていることを見いだす。つまり、彼には $f_n(t)$ はさもコホモロジー $\mathrm{H}^n(X)$ を計算しているように見えたのである。

コホモロジーとは図形の“位相”の情報を表したものである。そもそも学術研究において森羅万象の特徴を記述することは極めて大切な作業である。例えば以下のような図形があったときその特徴を取り出すにはどうしたらよいだろうか？



コラム2: 不変量

不変量とは文字通り、操作に対して不変な量という意味である。「面積」がなぜ不変量と考えられるのであろうか？ 幾何学は変換による不変性によって分類されるという考え方がある。これはクラインのエルランゲン・プログラムに端を発した謂わば指針である。例えばユークリッド幾何は平行移動や回転移動という対称性に対して不変な幾何学であるし、トポロジーは連続変形に対して不変なもっと自由度の高い幾何学である。トポロジーの方が様々な操作に対して不変であるという意味でしばしば「軟らかい幾何学」と呼ばれる。ユークリッド幾何の不変量として面積などが出てくるし、トポロジーの不変量としてコホモロジーが現れる。もちろん、コホモロジーはユークリッド幾何の不変量としても機能する。不変量は幾何学がある毎にあるのである。

特徴を表す数学的な対象を不変量と呼ぶ。例えば、「体積」や「表面積」などは代表的な不変量である。しかし、これらは図形を少しでも変化させるとたちまち変化してしまう量で、もっと大雑把な特徴を表したい場合にはあまり適していない。そのときは、例えば空いている穴の数に注目することがある。穴の数は図形を多少引っ張っても変わらない。一方で球面はどう引っ張っても浮き輪のように穴を開けることができない。そのため、穴の数のような不変量を用いても、図形を大別することはできることが分かる。このように引っ張るなどの連続的な操作で不変な図形固有の性質（この例では穴の数）を取り出す幾何学をトポロジーという。コホモロジーとは「穴の数」を一般化かつ抽象化した不変量であり、複素幾何など連続的な図形を扱う幾何学で頻繁に登場する極めて重要な不変量であ

る。一方で、有限体上の幾何学はトポロジーとは対極にある幾何学である。有限体上は有限個しか元がないのだからすべてがばらばらであり、連続的な不変量をどのように取ってよいのか分からない。それにもかかわらずゼータ関数にはなぜかトポロジカルな情報が見え隠れする。これが図2の三位一体の（☆☆）の部分である。

これらの考察のあと、ヴェイユはもっと一般的な有限体上の代数多様体Xのゼータ関数 $\zeta_X(s)$ に関する一連の予想を打ち出す。つまり、曲線とは限らない一般の代数多様体に対しても、$\zeta_X(s)$ は有理式（つまり多項式の分数）となり、おのおのの多項式の解は$p^{n/2}$（nは整数）という形をしていると予想した。この予想に付随して、ヴェイユは有限体上の代数多様体に対する位相的性質を取り出すようなコホモロジーの存在を予言する。終戦後間もない1949年のことであった。

ゼータ関数はなぜ大切なのか? これはどちらかというと宗教的な問いだ。数論を研究する人々はゼータ関数に重大な情報が含まれていると「信じている」のだ。しかし、この信心もあながち空想的ではない。BSD（Birch and Swinnerton-Dyer）予想と呼ばれ、リーマン予想と並んで1億円の懸賞がかけられている問題[*6]は、代数多様体のゼータ関数の情報にその代数多様体を定義する方程式の解の個数の情報が含まれていると予言している。方程式の解の個数は数論を志すものが究極的にほしい情報であり、それがゼータ関数に含まれていることを示している。そのほかにも現在中心的な難問の多くはゼータ関数 に関するもので、ゼータ関数を研究すれば偉大な真実にたどり着けると信じているのである。

§4　グロタンディークとℓ進コホモロジー

1950年代後半、ヴェイユによる予想を解くべく一人の天才が流星のごとく現れた。アレクサンダー・グロタンディークである。彼はヴェイユの予言したコホモロジー論の構築に動き出す。アルティンなどの協力の下、10年の集中した年月を経てついにℓ進コホモロジーという有限体上の多様体に対する位相的なコホモロジー論を構築する。できあがったものはヴェイユの想像していたものを遙かに上回る一般性と抽象性を誇っていた。彼らの結果はSGA[*7]と呼ばれるセミナーノートにまとめられた。総数5000ページを超える超大作であった。彼は後に自身の作った新しい幾何学を数論幾何と名付けた。

彼らの努力によりヴェイユ予想の大部分は解かれたもののリーマン予想の類似の部分だけは予想として残るかに見えた。しかし、グロタンディークの弟子であるもう一人の天才ドリーニュがグロタンディークの構築した枠組みをふんだんに用いることにより最終解決をする。1940年のヴェイユの手紙から30年以上の年月がたっていた。

複素幾何学では直感的だったものも数論幾何学では類似が極めて大変なことは多々ある。それを克服するために複素幾何の概念を極限までに理解しなくてはならない。そのため、数論幾何構築の過程で生まれた概念や哲学は膨大で、有限体上の幾何学が複素幾何学に与えた影響も計り知れない。ホッジ理論はある意味でヴェイユ予想の複素幾何類似であり（Deligne Hodge I[*8]参照）、ホッジ理論から来る重さの理論は幾何学的表現論でなくてはならない道具となっている。幾何学的ラングランズ・プログラムも有限体上の幾何学を媒介とした数論と複素幾何の類似から得られた理論であり、理論物理学との関係も取りざたされている。Kavli IPMUと関わりの深い例で言えば、現在代数幾何学で盛んに研究されている導来圏の概念もその過程で生み出された巨大な副産物の一つであり、例を挙げれば枚挙にいとまがない。我々は巨大な果実を手にしたのだ。

*6 2000年にアメリカのクレイ数学研究所が7つの数学の問題に各100万ドルの懸賞金をかけた。「リーマン予想」はそのうちの一つである。これまでに解決されたのは「ポアンカレ予想」のみで、グリゴリー・ペレルマンにより示された。
*7 *Séminaire de Géométrie Algébrique*（代数幾何学セミナー）、http://library.msri.org/books/sga/から入手できる。
*8 P. Deligne, "Théorie de Hodge. I," *Actes du Congrès International des Mathématiciens* 1, (1970) 425.

§5　ℓ進、p進、そして未来へ

さて、もう一度複素多様体と有限体上の多様体の類似に立ち戻ってみよう。複素多様体には位相的なコホモロジー論があるが、実は解析的なコホモロジー論も知られており、これら二つのコホモロジー論は一致していることが知られていた。グロタンディークの構築したℓ進コホモロジーの理論は位相的なコホモロジー論の類似であったわけだから、解析的なコホモロジー論の類似が有限体上でも期待される。実はこれはドゥウォークによりℓ進理論に先んじて考えられており、これを用いてヴェイユ予想の有理性の部分を解決していた。しかしℓ進のような一般論の構築は困難で、理論的に完成されたℓ進コホモロジー論に大きく後れを取ったのだった。グロタンディークによるクリスタリン・コホモロジーやモンスキーとヴァシュニッツァーによるコホモロジー論など、言及すべき結果は多々あるが、最終的に80年代、ベルテロによって有限体上の解析的コホモロジー理論、リジッド・コホモロジーが定義された。このコホモロジーはしばしばp進コホモロジーとも呼ばれる。定義された一方で基本的な性質が予想という形で残ったが、近年のp進微分方程式論の進展やドゥ・ヨングによる弱い意味での特異点解消定理の発見により最終的にケドラヤによりp進コホモロジー論が完成する。これらの結果を活用することにより、近年筆者はラングランズ型の定理を示した。これは曲線の場合において実質的にp進コホモロジー論もℓ進コホモロジー論も同じ情報を持っているという定理であり、グロタンディークの唱えた「コホモロジー論はモチーフから派生する」という哲学を、ある意味で具現化した定理であるといえる。

一口に有限体上の解析学と述べたが、有限体というばらばらな空間で解析学の「まねごと」ができるのは実に不思議なことだ。研究していると感じるが、現実世界で有限体上の理論と同じような現象が起きる理由は全くない。現時点で本当に何もないというのが率直な意見である。何か不思議な力で類似が引き起こされているようにしか見えないのである。私はこの不思議な力を「不思議な力」と崇めるのではなく、複素幾何における解析理論と同じ枠組みで捉えられるような人類の知恵にしたいと思っている。複素数体上の解析学と数論幾何学という新たな類似が実現された暁には、従来の三位一体の新たな化身として我々をさらなる高みへと誘ってくれるに違いない。

コラム3: ℓ進とp進

素数 p が一つ固定してあるとき、p とは異なる素数のことを ℓ とよび、区別して考えることが数論ではしばしばある。例えば、2次方程式$ax^2+bx+c=0$ を考えたとき、解は

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

の2つであった。分母に2があることに注目しよう。$\mathbf{F}_2$ の中で考えると $2=0$ なのだから、この分母は意味を持たなくなってしまう。一方、$\mathbf{F}_\ell$（$\ell\neq2$）で考えれば意味を持っている。このことから､別の挙動を示すことが分かるだろう。同じような理由から ℓ 進とp進理論は本質的に区別され、コホモロジー論でも ℓ 進とp進のコホモロジーは全く異なる手法で定義される。