配布資料目次

１．はじめの４ページでは，講演で出てきたことの要点がまとめてあります．ところどころ，説明がなされていない部分がありますがあしからず.

２．数学辞典 p.571-573, p.1284-1287.「数のいろいろ」で出てきた事柄が数学辞典でどのように説明されているかを見てもらうためにつけました．数学の言葉を知っている人（専門家）のための解説なので，そのまま読んでもわからない言葉があると思いますが，雰囲気を感じとってください.

３．数理科学 2011 年 5 月号 p.11-16 新井紀子「言語としての数学」．ここでは，数学の目的について，話が展開されています．なぜ数学ではこれこれのことを考えるのか，ということについて論じています．参考までに.

４．数理科学 2011 年 3 月号 p.14-35 清水勇二「代数方程式」，小林正典「解ける代数方程式」，三宅克哉「体と代数方程式」，梅村浩「代数学的な方程式と解析学的方程式の違い」.

講演で扱った題材は，これらの記事で，ときにより詳しく，またより難しく書かれています．話を聞いて興味がわいた方は，記事を読み，挙がっている参考文献などをみると面白いかもしれません.

５．IPMUNews2010 年 3 月号斎藤恭司「数学者の青春の夢」．IPMU の PI である斎藤さんが書いた一般向けの記事です．前半は講演を聞いたあとであれば読めると思います．後半もきっと面白いでしょう.

近藤　智
東京大学数物連携宇宙研究機構
特任助教
satoshi.kondo@ipmu.jp

数のいろいろ

自然数

（自然数全体を）$\mathbb{N}$ とかく.
1, 2, 3, . . . のこと.
素数を含む.
足し算（加法），かけ算（乗法）ができる.

整数

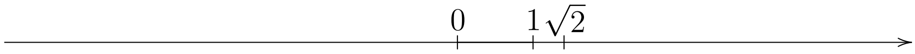
$\mathbb{Z}$ とかく.
. . . , -2, -1, 0, 1, 2, . . . のこと.
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (自然数は整数の一部分，という記号）.
足し算（加法），引き算（減法），かけ算（乗法）ができる.

有理数

$\mathbb{Q}$ とかく.
分数全体のこと.
たとえば，$\frac{3}{2}, -\frac{77}{99}$.
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (有理数は整数を含み，整数は自然数を含む）.
加減乗除ができる.

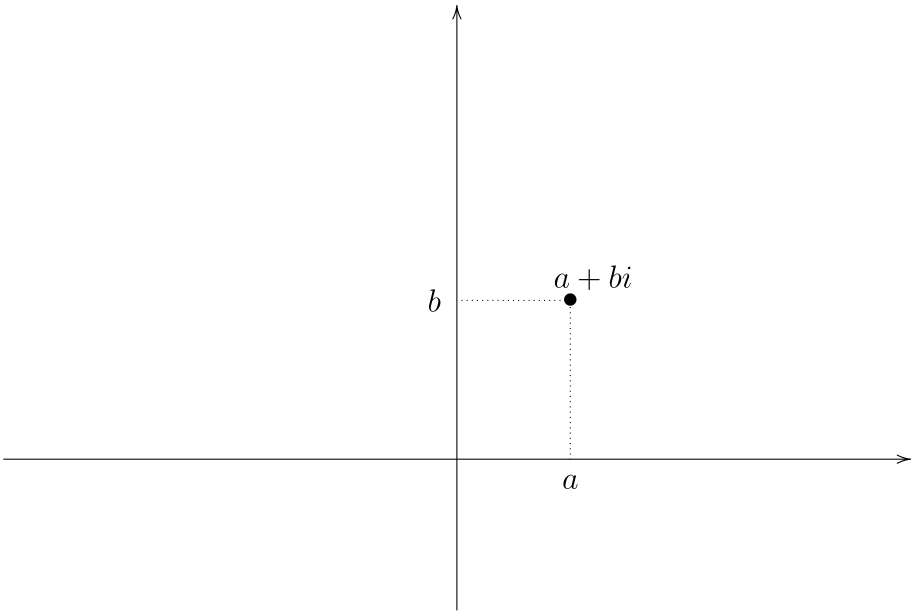
実数

$\mathbb{R}$ とかく.
厳密な定義は難しい（数学辞典のページを参照）.
イメージ１：数直線の点は実数と思える



イメージ２:無限に続く少数は実数と思える．たとえば，3.141567896546 . . . , 3.333333 . . . ...
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
有理数でない実数を無理数という．たとえば，$\sqrt{2}$ や π や $\sqrt[3]{5} + \sqrt{3}$ など.
循環小数や途中で終わる小数は有理数．たとえば，$\frac{1}{3} = .333\ldots$, $\frac{1}{2} = .5$ など.
数に大小関係がある．数直線で右に位置する数のほうが大きいとする.

複素数
$\mathbb{C}$ とかく.
虚数単位 $\sqrt{-1} = i$ は複素数. これは実数ではない.
$a + bi$ (a と b は実数) の形にかける数のこと.
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
イメージ :(複素) 平面の点



加減乗除ができる.

p 進整数
ここで, p は素数.
$\mathbb{Z}_p$ とかく.　　(この記号は位数 p の巡回群を表すこともある.)
$a_0 + a_1p + a_2p^2 + \cdots$ の形の数. ここで, $a_0, a_1, \ldots$ は $0, \ldots, p-1$ のいずれか.
たとえば, $p + p^3 + p^5 + p^7 + \cdots$.
イメージ : p 進法で無限桁の数のこと.
似ているイメージ : 無限小数から実数が作られるのと同様に, 無限桁の p 進法の数から p 進数が作られる.
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$
加減乗ができる.

p 進数
ここで, p は素数.
$\mathbb{Q}_p$ とかく.
$a_mp^m + a_{m+1}p^{m+1} + \cdots$ の形の数. ここで, m はある整数. 各 a_i は $0, \ldots, p-1$ のいずれか. p 進整数と異なり, 負べきからはじまってよい.
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p \supset \mathbb{Q}$
加減乗除ができる.

代数的数

(有理数係数の) 方程式の解（根）になっている数のこと．

方程式とは，$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ という式のこと．ここで，n は自然数．

有理数係数とは，$a_1, \ldots, a_n$ が有理数であること．他に，複素数係数なども考えられる．

方程式の解（根）とは，数 α であって，$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$ となるもののこと．

たとえば,

$\sqrt{2}$ は 2 次方程式 $x^2 - 2 = 0$ の根.（$n = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = -2$ とした.）

i は方程式 $x^2 + 1 = 0$ の根.（$n = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ とした.）

超越数

代数的数でない数のこと．

たとえば，e を自然対数の底（$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$）や円周率 $\pi = 3.1415\cdots$ は超越数.

これらが超越数であること（代数的でないこと）の証明は難しい.

代数学の基本定理

複素数係数の方程式は複素数の解をもつ.

注意：これは実は代数学の定理ではない.

使い方:たとえば，$x^5+4x^4+3x^2+2x+1$ という式は, $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)$ という形に因数分解する．ここで $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ は何かある複素数.

平たく言うと、「n 次方程式は n 個の（複素数）解をもつ」ということ.

オイラーの等式

π を円周率，e を自然対数の底， $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位とするとき,

$$e^{i\pi} = -1$$

が成立.

解の公式について

n を自然数とする.「n 次方程式の解の公式がある」ということとは，n 次方程式：

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

の根が，方程式の係数（すなわち，a_1 から a_n) と根号（すなわち，$\sqrt[n]{\ }$) を用いて表わされるということ．下で例を挙げる．

２次方程式の解の公式

２次方程式とは，$ax^2 + bx + c = 0$ のこと．
その解は

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

と表わされる．
注意：中学では,「$b^2 - 4ac < 0$ のときには方程式は解なし」と習う．これはより正確には,「$b^2 - 4ac < 0$ のときには方程式は実数解をもたない」という意味．たとえば，$x^2 + 1 = 0$ という方程式は，実数解をもたないが，複素数解（$\pm i$) をもつ．

３，４次方程式の解の公式

３次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の代わりに，$x^3 - 3px - 2q = 0$ を扱っても十分（２次方程式のときの平方完成に似たステップがいる）．このとき解は

$$\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

で与えられる．根号のとり方で，解は三つあるが，この説明は割愛した．

４次方程式 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ にも解の公式があるが，説明が長くなるので割愛.

５次以上の方程式の解の公式

５次以上の方程式には解の公式がないということが，アーベルによって示されている．
ガロアによるガロア理論は，どういったときに解がべき根を用いて表すことが可能であるか，その特徴づけを与えている．群論に至った大理論.

IPMU主任研究員 斎藤恭司
さいとう・きょうじ
専門分野：数学

一数学者の青春の夢

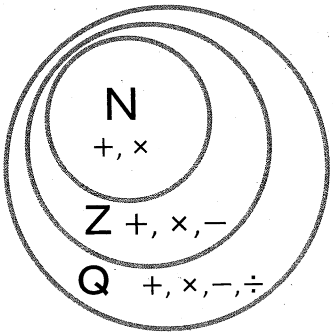
§1 クロネッカーの青春の夢

数学に「クロネッカーの青春の夢」と言う言葉があります。クロネッカーは19世紀後半に活動したドイツの数学者です。文献によると、彼は1845年22歳でベルリンで学位を取った後、亡くなった伯父の銀行と農場を引き継ぎその経営に成功していましたが、30歳頃、数学への思いを断ちがたく代数方程式の研究で数学に復帰します。クロネッカーの青春の夢とは、その頃彼が抱いていた代数方程式と楕円関数論とが精妙に交叉する数学の一連の予想を指すものと思われます。本稿では彼の抱いていた夢を説明しながら、それが現代の僕たちの夢にどうつながるのか解説します。

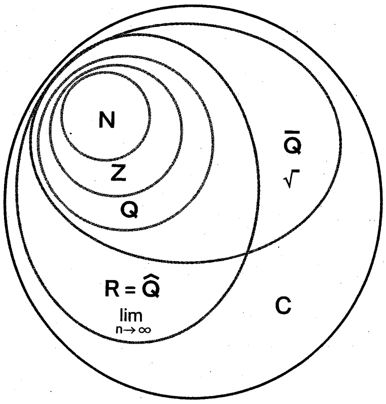
§2 自然数 N、整数 Z そして有理数 Q

まずはその説明のために数の体系の復習から始めます。以下では数学の用語や記号が現れます。はじめは一般の読者向けに高校で習った数学程度で理解できるように解説します。しかし、紙数に制限があるため途中から段々説明なしで現れる数学用語が増えてきますが、ご容赦ください。分からなくなったら途中を読み飛ばして、§9「クロネッカーの定理=代数的数と超越関数の間の最初の接点か?」と§10「新たな夢」を読んでください。数学用語はわからなくても、おぼろげながら「新たな夢」がどんなものか感じ取っていただければ幸いです。また、文末に置いた註はもう少し数学的な内容を知りたい読者向けのものです。関心のある方はご覧下さい。

一つ、二つ、三つ、と物を数えるときに出てくる数のことを「自然数」といい、その全体を N と記します。それは素朴には1から始まって順番に並び、有限回のステップで到達できる数です。すべての自然数について成り立つ命題を証明しようとするときは、高校でも習うような数学的帰納法が使われます(このことは、厳密に「ペアノの公理系」で説明されますが省略します)。N の要素（つまり自然数）の間には足し算と掛け算が定まりその結果再び N の要素となることは帰納法で証明できますが、引き算はできません。例えば 2−3はもはや自然数ではありません。自然数より広い数の体系…、−3、−2、−1、0、1、2、3、…では、減法も定まりそのような数を「整数」と呼び、整数全体を Z と記します。Z では加減乗法が定まったのですが、未だ割り算はできません。例えば−2/3は整数ではありません。このように二つの整数の比 p/q $(q\neq 0)$として表せる数を「有理数」といい（特に整数は有理数）その全体を Q と記します。有理数は加減乗除ができる数の体系です。(正確に言うと 0 で割ることは考えません。) 数学ではその様な体系を『体』と呼びます。これまでの数の体系の拡張を図式で示すと次のようになります。



それでは有理数体 Q で世界を測れるでしょうか。答えは"no"です。有理数体では未だ二つの操作、(1)代数方程式を解く、(2)数列等の極限となる数を考える、に関して閉じていないのです。以下の§3と§4、§5ではそれぞれの視点に立って、Q の二通りの拡張、$\overline{\mathrm{Q}}$ と $\widehat{\mathrm{Q}}$ を考え、§6でそれらを総合するものとして複素数体Cを考えます。



§3　代数的数 $\overline{\mathrm{Q}}$

有理数だけでは「世界を測る」ことができないことに既に古代ギリシャ人は気づいていました。例えば、短辺の長さが1となるような直角二等辺三角形（図1）の斜辺の長さは $\sqrt{2}$ で表されますが、それが有理数でないことを彼らは知っていました。この $\sqrt{2}$ を記号 x で表すと、関係式 $x^2-2=0$ を満たしています。一般に未知の数 x を含む多項式の関係式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$（ここで $a_0\neq0$、$a_1\cdots$、a_n は係数と呼ばれる既知の数）のことを「代数方程式」と呼びます。有理数を係数とする代数方程式を満たすような数xを「代数的数」と呼びます。例えば $\sqrt{2}$は代数的数です。ところで、高校で２次方程式（n=2の代数方程式）の解法を習いますが、一般的な解は§6で出てくる複素数であることをご存じと思います。$n\geq2$の代数方程式は複素数の範囲で解をもつことが知られています。有理数を含む代数的数の全体を $\overline{\mathrm{Q}}$ と記します。$\overline{\mathrm{Q}}$ では加減乗除ができるので体となります。更に、代数的数を係数とする代数方程式の解はまた代数的数になることは容易に示せます。このような $\overline{\mathrm{Q}}$ の性質のことを、数学では、$\overline{\mathrm{Q}}$ は『代数的に閉じている』といいます。（代数的に閉じていて Q を包み込んでいる $\overline{\mathrm{Q}}$ のことを『$\overline{\mathrm{Q}}$ は Q の代数的閉包である』といいます。）この $\overline{\mathrm{Q}}$ は複雑精妙なそして魅力的な体系ですが、今日の数学を以てしてもその完全な理解からはほど遠いものです。では $\overline{\mathrm{Q}}$ のみで世界を計れるのでしょうか。この問は数学基礎論に関わる問題を引き起こしますが、ひとまず別の視点からの数の体系の拡張を考えましょう。

§4　実数 R

ヨーロッパ近代のニュートン、ライプニッツに始まりベルヌーイ、オイラーと続いた解析学は未知の数や関数（$y=\sin(x)$ のように変数 x に好きな数を代入するとそれに応じて y の値が決まるとき、y は x の関数であると言います）を既知の数や多項式の列を使って近似するという概念を生み出しました(註1参照)。それとほぼ同じ時期に日本でも関孝和らに始まる（特に建部賢弘［たけべ・かたひろ］による）和算ではある種の逆三角関数や円周率π（の自乗）等を級数でもって近似するということが研究されました。建部自身は「自分は関先生のように純粋ではないから一挙に対象を直感的に代数的に捉えることができない。自分は偏駁（へんぱく、純粋ではないこと）であり、下等と評された泥臭い複雑な計算を行ってきた」という意味のことを述べていますが、むしろ建部は彼の師匠の関の持ち味であった代数的世界を超えて、解析（級数）により初めて到達することができる数や関数を把握したと言うべきでしょう。今日ではこのように有理数で『いくらでも近似できる』数のことを「実数」と呼び、実数の全体を R と記します。（いくらでも近似できることを『解析的である』と言います。）無限小数で表示できる数（例：円周率 $\pi=3.141592\cdots$）は明らかに実数ですしその逆も真なので（つまり、実数であれば無限小数で表示できます）、小学校以来学校で学ぶ数は実数ということになります。

有理数でない実数のことを「無理数」と言います。$\sqrt{2}$ や π は無理数です。日本の和算家達もこのような実数の近似計算を膨大にソロバンを以てやっており、高い計算力の技術を競い合っていたようです。他方ソロバンの大きさ

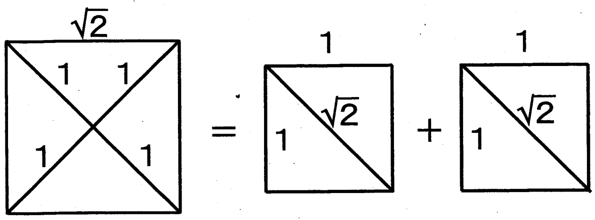


図1　対角線の長さが 2 となる正方形を考える。その面積は図のように分割して並べ直すことにより 2 となることが分かる。従ってもとの正方形の一辺の長さは $\sqrt{2}$ となる。

は有限であるのに、実数は一般に無限に近似しなければ到達し得ないという矛盾を論理的にどのくらい突き詰めて考えたのかはよく分かりません。（日本にはユークリッド流の論理的に突き詰める伝統は未だありませんでした。）現代でも、コンピュータで実数を取り扱うときは同じ問題に遭遇し、注意深い扱いが必要です。他方、この『いくらでも近似できる』という言葉の意味をハッキリさせようとした人たちには、古くはギリシャのアルキメデスや、フランスのコーシー、ドイツのデデキントやその同時代人のカントールらがおり、今日では実数の体系 $\mathbf{R}$ はそれらの人たちの仕事により記述されるのが普通ですが、本稿ではその説明は省略します。しかし、カントールが見つけた途轍もないやっかいな問題（註2参照）に見られるように $\mathbf{R}$ の理解は、$\overline{\mathbf{Q}}$ の理解とは別種の更なる難しさが加わります。

§5　代数的数 $\overline{\mathbf{Q}}$ 対 実数 $\mathbf{R}$

余談ながら、僕の見るところ、多くの数学者は $\mathbf{R}$ の理解に連なる仕事をしているか $\overline{\mathbf{Q}}$ の理解に連なる仕事をしているように見えます。多少、数の問題を考えたことのある数学者はそれぞれ独自の思い入れがあるように見えます。もう何年も前のことですが、現代最大の数学者と目されるドリーニュと研究会で一緒になった際話をしていて、実数の連続性が話題になりました。その時彼が「実数は難しい。我々はその理解から程遠い」と嘆かれているのを見て不思議な感動を覚えました。思うに、$\overline{\mathbf{Q}}$ にはまだ、絶対ガロア群と呼ばれる理解する手掛かりがあるのに比べて（註3参照）、$\mathbf{R}$ は収束級数すべてという、（無理数の有理数近似の理論はあるものの）未だに捕らえる手掛かりの少ない対象だからでしょう。この問題にはまた後で戻ってきましょう。

ところで、$\mathbf{Q}$ の代数的閉包を $\overline{\mathbf{Q}}$ と記したように、本稿では $\mathbf{R}$ を $\mathbf{Q}$ の解析的（又は超越的）閉包という意味で $\hat{\mathbf{Q}}$（つまり $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{Q}}$ ）とも記すことにします（註4参照）。

§6　複素数 $\mathbf{C}$ の不思議

$\overline{\mathbf{Q}}$ の代数的に閉じているという性質と $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{Q}}$ の極限操作で閉じているという性質とを兼ね備えた体が複素数体と呼ばれるもので、$\mathbf{C}$ と記します。高校でも習うので詳しい説明は省略しますが、二つの実数 a, b を記号 i を用いて加え合わせた $z = a + bi$ なる表示を持つ数 z が「複素数」です（ここで i は虚数単位と呼ばれ関係式 $i^2 = -1$ を満たしています）。$\mathbf{C}$ では不等式はもはや成立しませんが、絶対値 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ を用いることにより二つの複素数 z_1 と z_2 の間の距離が $|z_1 - z_2|$ で計れ、従って、近似の概念や極限の概念が成立します。その意味で、$\mathbf{R} = \hat{\mathbf{Q}}$ と書いたのと同様、$\mathbf{C} = \widehat{\mathbf{Q}+\mathbf{Q}}i$ と書けます。他方、$\mathbf{C}$ は代数的に閉じている（従って $\mathbf{C}$ は $\overline{\mathbf{Q}}$ を含む）ことはガウスにより示されました。（その証明は何通りもありますが、いずれも本質的には複素数の積がもつ「等角性」という絶妙な性質を用いており、そこに複素変数の解析関数論が生まれる萌芽が見られます。しかし、本稿では深入りしません。（註5の文献参照。）これで、複素数体という安定した数学的な対象に到達しました。それより少し早く、18世紀に活躍したオイラーは複素数変数で見ると、これまでばらばらに見えていた三角関数と指数関数が $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$ という驚くべき美しい関係（特に、$e^{\pi i} = -1$）で結ばれていることを示しました。このように、数学の巨人のガウスやオ

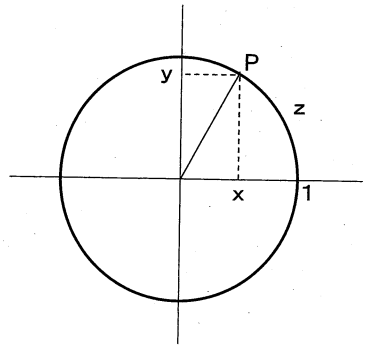


図2　半径 1 の円周上の点 $P=(x, y)$ を考える。
円弧 $\widehat{1P}$ の長さ z は積分
$$z = \widehat{1P} = \int_1^P \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_1^x \frac{|dx|}{\sqrt{1-x^2}}$$
で与えられる。すると z と x の関係は、
$x = \cos(z)$ で与えられる。

イラーらの仕事により複素数の数学の中での役割は不動なものになったと言えます。他方、宇宙を観測するとき直接見えているのは実数であるにもかかわらず、例えば電磁気学のように複素数を用いてはじめてその本質が解明できる物理理論が次々と生まれており、現代の量子力学の記述には複素数は不可避です。何とも不思議なことです。

さて、$\bar{\mathbf{Q}}$ に入らない複素数を「超越数」と言います。つまり、代数的数でない複素数は超越数です。円周率 π は超越数であることが1882年リンデマンにより、オイラーの関係式 $e^{\pi i} = -1$ 及び次項で説明をする解析関数 $\exp(z) = e^z$ の有理関数近似の理論を用いることで証明されています。§3 の終わりで述べた問いに立ち返れば、世界を測るには代数的数だけでも足りないということになります。しかし、$\mathbf{C}$ には $\mathbf{R}$ 同様、註2で述べた問題がついて回り、全ての複素数が必要なのか、それともその中の薄い部分集合のみで良いのか（註7の後半を参照）、複素数全体を必要とするならその役割は何なのかという疑問は続きます。

§7　有理関数、代数関数、解析関数

さて、これまで数の体系について長々と解説してきましたが、それは単なる歴史の回顧趣味からではなく、現代の数学者にとっても非常に現実的な問題だからです。一つには既に述べたように、$\bar{\mathbf{Q}}$ や $\mathbf{R}$ それ自体が未だ未解明の深い数学的問題を抱えているからですが、もう一つには、数学の新しい体系を構築をしようとする時、ここで述べてきたような数の概念の発展の形が繰り返し繰り返しモデルとなるからです。例えば、複素数 z を変数とする多項式の全体（$\mathbf{C}[z]$と記す）を考えることにします。$\mathbf{C}[z]$の要素どうしの間の加減乗算はできますが、商演算（割算）はできません。そこで二つの整数の商 p/q で有理数を考えたのと同様に、二つの多項式の商で $P(z)/Q(z)$ のように表せる関数を「有理関数」と呼び、それら全体を $\mathbf{C}(z)$ と記すことにします。すると $\mathbf{Q}$ から $\mathbf{R}$ を作った時と同様に、有理関数でいくらでも近似できるような関数（複素変数 z に関する「解析関数」）というものが考えられます（正確には変数 z がどの範囲を動くときどういう意味で収束するのかを指定する必要がありますが、省略します）。その極限関数の全体は巨大で特に名前もないのですが、$\mathbf{R}$ を $\hat{\mathbf{Q}}$ と記した記号法をまねて $\widehat{\mathbf{C}(z)}$ と記すことにしましょう。思うに、$\widehat{\mathbf{C}(z)}$ の理解が $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{Q}}$ や $\mathbf{C} = \widehat{\mathbf{Q}+\mathbf{Q}i}$ の理解を助けるのではないかと期待します。それは $\mathbf{R}$ や $\mathbf{C}$ の要素は数列の極限という、とっかかりの少ない対象であったのに対して、$\widehat{\mathbf{C}(z)}$ の要素は「変数」z という手掛かりがあるからです。必要に応じて、その変数 z に好きな値を代入するという自由度もあります。（例えば、$e^{\pi i} = -1$ という関係は解析関数という視点に立って初めて発見されたのです。）

なお、「代数関数」とは、$A_0(z), A_1(z), \cdots, A_n(z)$ を z の多項式とするとき、w についての方程式 $A_0(z)w^n + A_1(z)w^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(z)w + A_n(z) = 0$ の解として定まる z の関数 wのことを言います。代数的数でない数は超越数であることのアナロジーとして、有理関数 → 代数関数 → 解析関数という拡張において、$\widehat{\mathbf{C}(z)}$ の元の中で代数関数にならないもの（有理関数は代数関数に含まれます）を「超越関数」と言います。そこで、§5で考えていた $\bar{\mathbf{Q}}$ と $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{Q}}$ との対比を拡張して、以下では $\bar{\mathbf{Q}}$ と $\widehat{\mathbf{C}(z)}$ との対比を考えることにします。すなわち、代数的数 対 超越関数という図式を考えます。

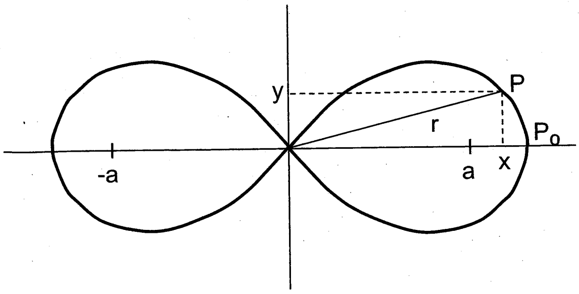


図3　レムニスケート曲線
$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$（但し、$a$ は正の実数）は x 軸上の 2点 $\pm a$ からの距離の積が一定な a^2 となる点 P の軌跡として特徴付けられる。その弧 $\widehat{P_0P}$ の長さは積分
$$z = \widehat{P_0P} = \int_{P_0}^{P} \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$$
で与えられる。その逆関数 $r = \varphi(z)$が楕円関数となる。

§8　超越関数と周期積分

超越関数の例として著名なものにガンマ関数 $\Gamma(z)$、リーマンのゼータ関数 $\zeta(z)$ などがあります。既に見た指数関数 $\exp(z)$ や三角関数は、ある意味で有理関数に引き続き現れる最初の初等的超越関数と言えます（註6参照）。

その意味を少し説明します。円弧の長さは積分 $z = \int_1^x \frac{|dx|}{\sqrt{1-x^2}}$ で求まります（図2）。その積分で定まる対応（写像）$x \rightarrow z$ の逆写像 $z \rightarrow x$ が三角関数 $x = \cos(z)$ になっているのです。別の言い方をすると円（二次曲線）の弧長積分の逆関数として三角関数が求まったというわけです。高校でも学ぶように三角関数は 2π を周期とする周期関数で加法公式を満たしています。そのことから円の弧長の積分を周期が 2π の周期積分と呼びます。また、加法公式から円弧を自然数 q 等分した点の位置座標は、q 次の代数方程式を解くことにより得られることが分かります。それでは、円に代わって三次、四次曲線にしたら弧長積分はどうなるかは自然な問といえます。残念ながら本稿では全く述べられませんが、楕円関数論やアーベル関数論はそのような素朴な疑問から生まれた（しかし複素変数の理論として高度に発展した）周期積分の理論といって良いでしょう（註5の文献参照）。レムニスケート曲線（図3参照，ベルヌーイが見つけた）の弧長は積分 $\int \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$ で与えられます。これが恐らく最初に研究された楕円積分で、ガウスを遡る100年前イタリアのファニャーノにより倍長公式が、その後オイラーにより加法公式が発見されたのです（ヤコビはそれを以て楕円関数論の開始としています）。その積分の逆写像がガウスの整数環 $\mathbf{Z}+\mathbf{Z}i$ を周期にもつという特別な楕円関数となります。

§9　クロネッカーの定理 = 代数的数と超越関数の間の最初の接点か？

今日「クロネッカーの定理」として次の二つが知られています（用語の説明は註3の文献参照）。

1. 有理数体の任意のアーベル拡大体は、指数関数 $\exp(2\pi iz)$ の変数 z に有理数 p/q を代入した値（要するに円周 $S^1 = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ の q 等分点の座標のこと）を有理数体に付加することにより得られる。
2. ガウスの整数環　$\mathbf{Z} + \mathbf{Z}i$ の任意のアーベル拡大はそれにレムニスケート曲線の等分点の座標の値（それはレムニスケートに対応する楕円関数の特殊な値になっている）を付加することにより得られる。

クロネッカーの定理（本人は証明を書き残していない）は数論と超越関数論との入り交じった不思議な定理です。クロネッカーは、更にその先の虚二次代数体のアーベル拡大体は虚数乗法をもつ楕円関数の変換方程式の解を付加することにより得られるという命題の証明に生涯の最期を賭けたようで、彼が58歳の時に同じくドイツの同時代の数学者デデキント宛の手紙の中で「わが青春最愛の夢 (mein liebster Jugend Traum)」と述べています。

クロネッカーはかなり好き嫌いの激しかった人のようで、有名な言葉に「整数は神が作られた。その他は全て人の仕事である。(Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.)」があります。歴史の本には、クロネッカーはやはり同時代人のドイツの数学者カントールの集合論を徹底的に論難し、カントールはそれに悩まされて精神病院に入ってしまったとあります。クロネッカーのように数のもつ精妙な

構造を取り扱う数学と、カントールのようにそのような構造を捨象してその捨象を徹底して行き着いた数学とは全くの対照的なものですが、どちらもその徹底ぶりに惹かれる僕にとってはその両者の不幸な関係には当惑するものです。ではクロネッカーは単純に $\overline{\mathbf{Q}}$ 側の人かというと、それは全く逆で、彼の結果や夢は $\overline{\mathbf{Q}}$ と $\widehat{\mathbf{C}(z)}$ との微妙な接点について述べています。それは、まるで $\widehat{\mathbf{C}(z)}$ を理解することにより $\overline{\mathbf{Q}}$ が理解できることを示唆しているように見えます。次節では、それに触発された僕自身の夢を書いてみます。

§10　新たな夢

僕自身若いときにクロネッカー青春の夢で登場した二つの超越関数、即ち指数関数と楕円関数及びそれらを生み出した周期積分の理論に感動し、それらを高次元化することを目指してきました。

大雑把に言って、クロネッカーが見出したのは「有理数体 $\mathbf{Q}$ を代数閉体 $\overline{\mathbf{Q}}$ に迄拡大していく最初のステップ（即ち、$\mathbf{Q}$ や二次体のアーベル拡大等）は、有理関数体を超越関数体に拡大していく最初のステップに登場する指数関数や楕円関数の特殊値を $\mathbf{Q}$ に付加することにより実現できる」と解釈できます。裏付けもない話ですが、想像を巡らせて、「もっと一般の代数拡大(体)に対しても対応する超越関数(体)があり、その特殊値を付加することにより代数拡大が実現しており、さらには $\overline{\mathbf{Q}}$ での代数的拡大のヒエラルヒー（註3参照）は対応する超越関数間の“何らかのヒエラルヒー”(楕円関数を特殊化すると指数関数となるような）を引き起こしている」のではないかと想像します（註7参照）。するとそこに登場するべき超越関数とはどのようなものなのでしょうか。

僕の青春の夢は「そのような $\overline{\mathbf{Q}}$ と $\widehat{\mathbf{C}(z)}$ との間をつなげる超越関数や保型形式(の候補者の一部分)を円積分や楕円積分を一般化した原始積分と呼ばれる周期積分とその逆写像により与えること」です。そのために第一種楕円積分の高次元の一般化として原始形式とその周期積分の理論を提案してきました。もっと具体的には、a）特異点の普遍変形（またはランダウ - ギンズブルク・ポテンシャル）に対し定まる原始形式を特徴づけるための半無限ホッジ理論（現在では非可換ホッジ理論と呼ぶ著者もいます)、b）周期積分の逆写像の成分として得られる保型形式たちの空間の構造としての平坦構造(フロベニウス構造とも呼ばれる)の理論、c）原始形式を(無限)可積分系の中で捕らえるために導入した種々のルート系や正規ウエイト系に付随する無限次元リー環（楕円リー環、カスプリー環、...）の理論、更には d）それらのリー環を圏論的にリンゲル - ホール構成するための導来圏の導入等々（いずれも未完成ですが）いろいろ考えてきました。不思議なそして驚いたことですが、最近これらの純粋に数学的動機で考えてきた諸構造の片鱗が、素粒子物理学やストリング理論の中にトポロジカル・ストリング理論あるいはランダウ - ギンズブルクモデルと呼ばれてほの見えてきたのです。元々数の体系を理解したいというこれらの試みが宇宙や物理学の理解にも役立つことを切に願うものです。

註1　有理数全体には大小関係が入ります。よって二つの数 x と y の間の距離を $|x-y|=\max\{x-y, y-x\}$ で定め、距離が小さいほど近いということにします。ある数 x を数の列 $y_1, y_2, y_3, \cdots$ が近似するとは $|x-y_n|$ (n=1, 2, 3, ...) が小さくなりいくらでも 0 に近づくことと定義します。また、無限和（級数と呼ぶ）$y_1+y_2+y_3+\cdots$ は数列 $y_1, y_1+y_2, y_1+y_2+y_3, \cdots$ が x を近似する時 xに収束すると言って $x=y_1+y_2+y_3+\cdots$ と書くことにします。例: $\pi^2/6 = 1+1/2^2+1/3^2+\cdots$（ライプニッツ)。

註2　カントールは「集合 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$ そして $\overline{\mathbf{Q}}$ はその構造を忘れてしまえば互いに 1：1 の写像が作れる一方、集合 $\mathbf{R}$ はそれらより真に大きい」ことを見出しました。このことは、無限集合の間でもその大きさの間に大小関係が成り立つことを意味しますが、それでは $\mathbf{N}$ と $\mathbf{R}$ の中間の大きさの集合があるのかという問題を残しました。カントール自身はそのようなものは無いという連続体仮説を提唱しましたが、今日では連続体仮説は集合論の公理から独立であることが示されています。即ち、我々は $\mathbf{R}$ の部分集合で $\mathbf{R}$ より真に小さく $\mathbf{N}$ より真に大きいものがあるのか否か知らないのです。

註3　$\overline{\mathbf{Q}}$ は代数体と呼ばれる $\mathbf{Q}$ に代数的数有限個 ξ を付加することによって得られる部分体 $\mathbf{Q}(\xi)$ により埋め尽くせます。二つの代数体がその間に包含（拡大）関係 $\mathbf{Q}(\xi')\subset\mathbf{Q}(\xi)$ で或る適当な条件を満たしていると、ガロア群と呼ばれる有限群 $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\xi')/\mathbf{Q}(\xi))$ が定まります。そこでガロア拡大に対応するガロア群の射影極限 $\varprojlim \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\xi)/\mathbf{Q})$ が絶対ガロア群と呼ばれています。絶体ガロア群は全てのガロア代数体とそれらの間の包含関係のなす「ヒエラルヒー（階層）構造」を記述しているといえます。またどんな代数拡大もそのガロア群がアーベル群か単純群になるような簡単な拡大（そのような体の拡大を本稿ではアーベル拡大、単純拡大と呼びます）の系列に分解することもよく知られています。参考文献: Emil Artin著 : *Algebra with Galois Theory*, American Mathematical Society, Courant Institute of Mathematical Sciences, ISBN978-0-8218-4129-7

註4　$\mathbf{Q}$には註1で述べたアルキメデス的と呼ばれる距離以外に、p－進距離（pは素数）と呼ばれる距離が入り、それに関する閉包 $\mathbf{Q}_p$ と区別する必要があります。

註5　楕円積分を含む、アーベル積分等の周期積分に関する教科書として C.L.Siegel 著 *Topics in complex function theory*, Teubner (1970) を掲げますので、興味のある読者の一読を強くお薦めします。

註6　指数関数や三角関数は、ガンマ関数やゼータ関数とは（フーリエ双対となる）別系列の超越関数であることを補足しておきます。

註7　ここで述べた対応は非常に曖昧ですが、実二次体のアーベル拡大の場合についてはヒルベルトはある特別な保型形式がそのような役割を果たすであろうと示唆し、それに従い研究がされています。一般の場合にこのような対応を想像することに意味があるかは全く定かでありません。非アーベル単純群をガロア群とする代数拡大に対応して超越関数側で何が起きているのか、Moonshineなどいろいろ空想はできますが、今のところ数学的に意味ある命題を述べる材料はないと思います。もしそのような対応があれば、そこに登場する超越関数たち全体は $\overline{\mathbf{Q}}$ に対応しているという意味で超越関数体全体の中では非常に薄い（集合論でいう濃度 $\aleph_0$［アレフゼロ］の）集合になります。それらの関数は超越的とはいえ、何らかの意味でアルゴリズムで統制された特殊関数と言えます。カントールの問題（註2）はそのような特殊関数やその特殊値たちのみを考えることで避けられるのでしょうか？また、数学物理や宇宙の記述にとって必要な関数や数はその非常に薄い集合に入っているもののみで充分でないかと期待することは意味あることなのでしょうか。これらが§6の終りに問うた疑問です。気になることは沢山あります。