

超弦理論：宇宙の遺伝情報

量子レベルで物質と重力を矛盾無く記述する理論として知られている唯一の理論が超弦理論である。超弦理論は非常に簡単な基本原理によって物理法則を規定する。即ち、素粒子を非常にミクロな世界で観測すると、微小なひもで置き換えられる。電子やクォークやヒッグス粒子のような質量をもち物質を構成する素粒子も、光子やグルーオンや重力子のように質量をもたず力を媒介する素粒子も、どちらもひもで置き換えられることになる。

素粒子論では孤立した素粒子の例えば質量や角運動量のような性質は、素粒子同士の相互作用あるいは力の性質とは分離して考えることができる。孤立した素粒子はファインマン・ダイアグラム中の線で表される。ファインマン・ダイアグラムで1本の線が他の線と出会う頂点は、力を媒介する素粒子による素粒子同士の相互作用を表す。素粒子理論では、このような頂点の種類と数には任意性がある。

超弦理論の規則はこれとは異なっている。力を媒介する素粒子と物質粒子は、全て同じ種類のひもの異なる配位なのである。張力等の基本的なひもの性質と、ひもが運動する空間の形状を定めると、物質粒子と力の性質も一意的に定まってしまう。はっきりした接合点をもつ線の代わりに、ひもの分離と結合は時空間に描かれた滑らかな2次元の面により記述される。分離していた運動と相互作用は単一の滑らかな事象に統合され、従って孤立して進む素粒子の性質を規定する力学と同じ力学が素粒

子の相互作用を規定するのである。

この等価性の無矛盾条件は厳しいものではあるが、はっきり定義されていて、その条件に対する解は共形場理論として知られている。ひもの運動法則を定める共形場理論は時には「超弦理論の真空」とも呼ばれる。共形場理論が真空と呼ばれる理由は、素粒子の特定の配位を定めるのではなく、いかなる素粒子も導入される以前の空の空間の配位を定めるものだからである。

3次元カラビ-ヤウ多様体から得られる真空

個々の異なる真空では素粒子の質量は異なり、力も素粒子の相互作用も異なる。重力が非常に弱い場合、共形場理論の物理的な無矛盾性条件は3次元^{*1}カラビ-ヤウ多様体 (CY3) と呼ばれる非常に特殊なタイプの幾何学的な形に対する数学的な無矛盾性条件と一致する。

3次元カラビ-ヤウ多様体は非常に小さく縮こまった（あるいはコンパクト化された）余分な空間の次元を定義するものと考えられる。カラビ-ヤウ多様体によるコンパクト化は1984年にフィリップ・キャンデラス、ゲリー・ホロヴィッツ、アンドリュー・ストロミンジャー、及びエドワード・ウィッテンにより発見され、最初の超弦理論革命がもたらされる一助となった。

^{*1} 複素3次元なので、実次元は6次元である。

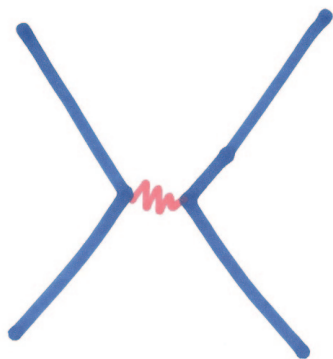


図1a 点粒子の相互作用を記述するファインマンダイアグラム。



図1b 超弦理論ではファインマンダイアグラムは滑らかな弦の軌跡で置き換えられる。

一つの理論に多くの真空が存在

3次元カラビ-ヤウ多様体CY3には少なくとも数百万、恐らくは無限の異なるタイプの幾何学的形状がある。CY3について、あらゆる可能な場合を数え上げることは未解決の問題であり、数学者にとってそれ自体が数学の問題として非常に興味深いものである。

更に、CY3を幾何学的に分類する問題は、矛盾のない超弦理論を分類し数え上げるという、もっと大きく、より複雑なパズルのほんの小さく単純な要素に過ぎない。超弦理論の真空は、CY3自身の形に加えて、フラックスとして知られるある種のエネルギーとブレーンとして知られる広がりをもった物体のCY3内部の分布によって特徴付けられる。ブレーンとフラックスは、CY3の内部に埋め込まれたホモロジーサイクルと呼ばれる閉じた形をした部分に巻き付いている。ホモロジーサイクルは空間内の2次元球面（通常の3次元空間の球面。その表面は2次元多様体であるので、2次元球面と呼ばれる）または3次元球面（4次元空間内の表面が3次元多様体である超球面）のような形のものと考えてよい。あるCY3が1つ与えられたとき、その各ホモロジーサイクルの数をホッジ数と呼ぶ。

それぞれのホモロジーサイクルに対して、それに巻き付くブレーンの個数とフラックスの量は独立であるため、真空の配位として可能な数はホッジ数とともに指数

関数的に増大する。CY3の理論的に可能な最大のホッジ数が幾つであるかは未知であるが、既に500程度の非常に大きなホッジ数をもつ例が知られている。これは超弦理論がCY3のホモロジーサイクルを被覆するブレーンとフラックスの異なる配位によって定まる 10^{500} 個もの真空をもつかもしいないということを意味する。

このように、超弦理論では莫大な数の異なる真空がある。そのうちたった一つの超弦理論の真空が、我々の住む世界、即ちこれまでの実験では素粒子の標準模型の法則が成り立つとされる世界の力学を記述することができる。他の大部分の真空は必然的に我々の世界とは著しく異なるものである。つまり、我々の世界では電子の電荷は 1.6×10^{-19} クーロンに他ならず、最近発見されたヒグス粒子の質量は 125.5×10^9 電子ボルトに他ならない、等々、いろいろな物理量の値が定まっている。真空が異なれば電子の電荷やヒグス粒子の質量等はとんでもなく違った値になり、実現されうる圧倒的多数の宇宙は我々の住む宇宙とは異なるものであることが分かる。

それにもかかわらず、我々の住むたった一つの真空だけではなく、全ての真空を理解することは重要である。その理由の一つは、我々理論家がまだ自分たちの世界を記述する特別の真空、つまり標準模型の力学を与える特別のカラビ・ヤウ多様体あるいは共形場理論を見極めていないことによる。それは、我々が現在行っているよりもっと系統的に超弦理論の真空を理解すること無しに

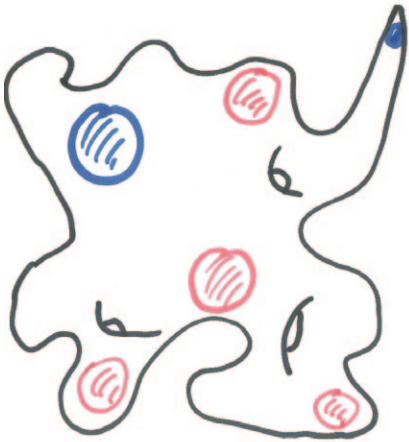


図2 カラビ・ヤウ多様体は異なる閉じた2次元球面（青色）と3次元球面（赤色）の数により部分的に特徴付けられる。この図に示すカラビ・ヤウ多様体は2個の2次元球面と3個の3次元球面を有する。

は不可能であろうと思われる。

また、宇宙論的な考察が示唆するところによれば、恐らく全ての真空はそれぞれ時空のどこか、互いに細々とつながり加速度的に急速に遠ざかりつつあるどこかの島宇宙で実現されているかもしれない。もし別の真空が単なる理論的な可能性ではなく、実際に宇宙のどこかで実現されているならば、恐らく宇宙背景放射のパターンを通じて他の島宇宙に関する何らかの情報を得ることが実験的に可能であるかもしれない。

制限原理としてのホログラフィック限界

CY3の種類の分類や数え上げがまだできていないのに、この複雑さがどの程度のものであるのかを理解することができるだろうか。ブレーンとフラックスの組み合わせによって人知を超える複雑な真空を出現させるような、ホッジ数が500を遙かに超えるCY3が発見されることが果たしてあり得るだろうか。超弦理論が許す可能な真空の範囲を探るために、3次元カラビ-ヤウ多様体の複雑さ、あるいはより一般的には超弦理論の真空の複雑さを制限する原理は何かを理解することが重要である。

この問題の理解について、一見関係ないように見えるブラックホールでの展開が進歩をもたらした。1970年にスチーブン・ホーキングによって発見されたのであるが、ブラックホールは秩序のある量子的な情報を吸い込

み、熱放射によってその情報を一見統計的に無秩序な雑音に変えてしまう。この発見以来、ブラックホールの量子力学は量子重力の情報理論的性質についての重要な知見を与える分野となってきた。^{*2}

1990年代初期にジェラルド・トフーフとレオナルド・サスカインドに率いられた理論家たちが「ホログラフィー原理^{*2}」として知られる基本法則を導いた。ホログラフィー原理は、空間のどんな領域のどんな重力系をとっても、常にその量子力学的情報全体が、その領域の内部よりはむしろ領域を囲む表面に記録され得ることを意味する。更にトフーフとサスカインドは、表面に詰め込める情報量は最大限詰め込んで 10^{70} 平方メートル当たり1ビットであると仮定した。このサイズはプランク長として知られる、そのスケールにおいては量子重力が他の全ての力を凌駕する距離の2乗である。

当初ホログラフィー原理は思考実験を用いた論理的推論に基づいて提案し主張されたものであり、実際の実験、あるいは詳細な理論模型に基づく何らかの計算から推測されたというようなものではなかった。そしてトフーフとサスカインドの議論は超弦理論とは無関係のものであった。しかし、ホログラフィー原理は、1997年のフアン・マルダセナの研究により超弦理論における具体的な形で実現された結果、広く知られることとなった。現

^{*2} ブラックホールの情報問題とホログラフィー原理については、IPMU News No. 7 (September 2009)のp.30-33もご参照下さい。



図3a タ方、(3次元空間の)和室で寛ぐ筆者。筆者が畳に座り、また畳が床に敷かれているのは重力のおかげである。



図3b タ方のできごとは、数学的に等価なホログラフィー理論によりシミュレートされる。各瞬間における部屋の中の配位データは、部屋の(2次元の)壁面に記録されている。

在ホログラフィー原理は広く受け入れられ、超弦理論を含む無矛盾の量子重力理論に対して成り立つと信じられている。

ホログラフィー原理は単なる模型や特定の理論ではない。その論理的に一貫した原理は重力を含む量子理論として可能なもの全てに対し、理論が相対論的かつ量子力学的でありさえすれば理論の残りの部分の内容によらず適用可能である。いかなるタイプの物体を含み、それらがどんな相互作用をして、どんな運動法則に従う場合であっても、また空間の次元がいくつであっても、あらゆる相対論的な理論に対し、量子力学と重力の両方が含まれる理論であれば必ずホログラフィー原理が適用できる。

ホログラフィー原理の意味を理解するために、(読者の皆さんに異存がなければ)日常生活に当てはめてみることにしよう。ホログラフィーが物語ることは、我々のよく知っている3次元宇宙において、あなたが座ってこの文章を読んでいる部屋の中の全ての物理的なできごとは、同じ部屋の壁面上に存在する等価な量子系によりリアルタイムでシミュレートされているということである。然り、あなたの優雅な和室におけるコーヒーと音楽の心地よい夕べは現実のものではなく、壁面を覆う極めて薄い量子コンピューターによってシミュレートされているのだ!

その意味するところで最も重要なことは、部屋の中に

含まれる量子力学的情報が大きくなりすぎることとは決してあり得ず、本質的な「ホログラフィック限界」を超えることはできないということである。この夕べにあなたが行うことのできる活動の複雑さには本質的な限界が定められているのだ。もしあなたが夕食を料理しているなら、ホログラフィー原理はキッチンにある料理の本に詰め込むことのできるレシピの数を制限する。もしあなたがMP3プレーヤーで音楽を聴いているなら、あなたの部屋の壁面の面積を平方メートル単位で表したとして、その1070 倍以上の歌をプレイリストに載せることはできない。なぜかという、MP3プレーヤーも料理の本も現実ではなく、壁面上のハードディスクに1プランク長当たりたった1ビットの記録容量で書き込まれた情報だからである。

この限界は本質的である。夜が更けるにつれてあなたが退屈したとしても、アップルストアに行って壁面の目に見えないハードディスク上の記憶容量を倍にアップグレードすることはできない。ホログラフィー原理が告げることは、代わりに部屋の壁の面積を倍にする必要があるということである。

ホログラフィー原理の論理が普遍的に適用できる議論に基づくことから、ホログラフィーは実現可能な超弦理論においてホッジ数の制限を得るために使えるかもしれない。その論拠は簡単で、カラビ-ヤウ多様体内部のフラックスは、どのような2次元サイクルあるいは3次元

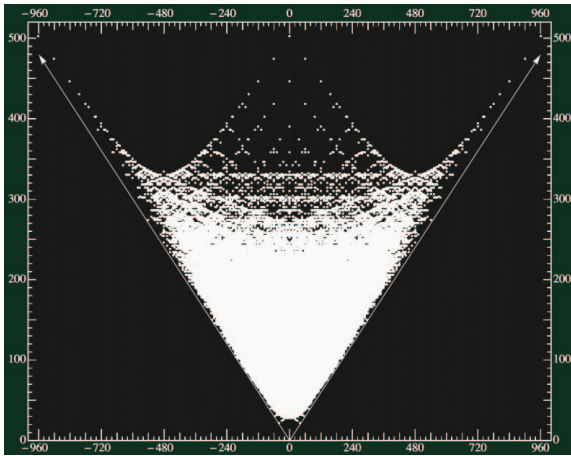


図4 カラビ・ヤウ多様体の性質を示すプロット。縦軸はホッジ数の合計を示す。(横軸は2つのホッジ数の差の2倍を示す。) 数学の未知の原理がホッジ数の合計を約500以下に制限しているように見える。Credit: P. Candelas et al., <http://arxiv.org/abs/1207.4792>

サイクルを通り抜けているかという情報を運んでいる。従って、フラックスの単一粒子は必然的に情報を運び、カラビ-ヤウ内の球面の数が多ければフラックスがどちらを向くかの選択肢も増える。ホッジ数はフラックスの単一粒子が運ぶ量子力学的情報量を規定する。

独創的な幾何学者が、ホッジ数が大きすぎる3次元カラビ・ヤウ多様体を発見したと仮定してみよう。すると、やがて部屋の中でフラックスの単一粒子により運ばれる量子力学的情報が、その部屋の壁面がホログラフィックに蓄えることのできる情報量を超えてしまうことになるであろう。これはホログラフィー原理に反するため、実際には不可能である。故にカラビ・ヤウ多様体のホッジ数の大きさはある限界以下に制限されると結論できる。

私自身や他の人たちの最近の研究により、このホログラフィック限界のアイデアがさらに定量化された。モジュラー不変性として知られる共形場理論の一般的無矛盾条件を解析し、その無矛盾条件をマルダセナのホログラフィック対応を用いて解釈するため、私は2009年の論文で初歩的な微積分と代数を用いた。マルダセナの規則を用いて解釈すると、無矛盾条件は超弦理論の真空における素粒子の質量に関する普遍的制限となる。その後Kavli IPMUのコーネリアス・シュミット-コリネットとの共著論文で、我々はこの手法を拡張し質量をもたない素粒子 (例えばCY3のホッジ数により数えられるフラックスの粒子)の種類についての制限を導いた。2012年には、

クリストフ・ケラー (Caltech) と大栗博司 (Caltech及びKavli IPMU) が超対称性を仮定することによる追加情報を用いて、質量をもたない素粒子の種類に関する制限を劇的に改善した。

ある技術的な仮定の下で、CY3の全ホッジ数に関する理論的ホログラフィック限界は、約 $e^{2\pi} = 5354 \dots$ となる。この値には小さな補正が入るが、大きくは変わらない。数学者にとっての厳密な普遍的限界は知られていないが、これは具体的に構成された3次元カラビ・ヤウ多様体のうちで最も大きな全ホッジ数、約500に著しく近い値である。数学者自身が未だに説明できていない純粋数学が提示するデータを、物理的な推論によってほぼ説明できるということは実に印象深い。

結論

ホログラフィー原理は量子重力の遺伝情報であり、理論の入り組んだジャングルにはその遺伝情報が潜在的には無数に存在する。我々は今やこの広大な生態系に生息する生物相の中で、超弦理論のホログラフィックなDNAがいかにして家族的類似性^{*3}を形成するのか、理解し始めている。

^{*3} 本来はルートヴィヒ・ウィトゲンシュタインが著書『哲学探究』において導入した言語哲学・認知言語学上の概念。