IPMU主任研究員 アレクセイ・ボンダル
Alexey Bondal
専門分野：数学

代数から代数多様体へ

グロタンディーク以降の導来圏

数学者たちは、ホモロジー代数を数学の中で最も形式的な分野の一つとみなしている。この分野の形式的で厳格な特性は、基本的な定義から先へ進むだけでも多大な努力を要し、この分野を学習し始めた人たちも多くは恐れをなして逃げ出してしまう。高度に形式的なこの理論は、門外漢にとっては*ding an sich*、* つまり認識できないものであり、この理論を学習してもその努力は決して報われない、という印象を与える。

導来圏の概念を導入した、現代的ホモロジー代数の偉大な創始者であるアレクサンドル・グロタンディーク（Alexander Grothendieck）が、この分野で数十年に渡って中心的な役割を果たした舞台を去って後、ホモロジー的理論は限界に達し、役に立たない形式的な理論となったという意見が数学界に広がった。一見不合理なことに、フランスのようにグロタンディークの思想に著しく影響された国々でこのような意見が特に強かった。私が21世紀の初めにパリ第6大学と第7大学を訪れた際、フランスではホモロジー的手法が極めて有効な代数幾何学と呼ばれる数学の分野が2つの潮流に分裂していたのを見て衝撃を受けた。古典的な方法で幾何学を勉強してきて、導来圏など聞きたくもないという一派と、導来圏の極めて形式的な側面だけを勉強してきて、イタリアの学派が19世紀末から20世紀初頭にかけて発展させ極致に至らしめた古典的な代数多様体の幾何学について何も知らない一派である。それぞれの集団には有力な代表的研究者たちがいたが、彼らの研究に共通する点はほとんどなかった。

* 訳注：カントの『純粋理性批判』第2版序文によれば、「我々が認識し得るのは、物自体（Ding an sich）としての対象ではなくて、感性的直観の対象としての物―換言すれば、現象としての物だけである。」（カント著、篠田英雄（訳）『純粋理性批判 上（岩波文庫）』p.40より引用。）

この不思議な事態に至った一つの理由は、恐らくグロタンディークの最も優秀な弟子の一人であるピエール・ドリーニュ（Pierre Deligne）による、複雑なホモロジー代数を用いたヴェイユ（Weil）予想の解決、という偉大な功績の副作用であるのかもしれない。これらの予想は、多分、数論的な性質が強く、イタリア学派による古典的な意味での代数多様体の幾何学とはあまり関係がないものである。長年に渡り、導来圏の応用は、古典的な代数多様体の幾何学的研究におけるよりは、代数多様体の数論的・位相的な側面、後には表現論において発展した。

結合的代数

例として結合的代数上の加群の圏を取り、ホモロジー代数の観念を遡ろう。数学者たちは加法や乗法などの演算を許す様々な数学的構造を研究し始めた結果、結合的環と呼ばれる重要な代数的構造に辿り着いた。要するに、加法については結合性と交換性を、乗法については結合性を、さらには乗法は加法に関して分配的であることを要求する：

$(a+b)+c=a+(b+c)$、
$a+b=b+a$、
$(ab)c=a(bc)$、
$(a+b)c=ac+bc$

全ての元に対しスカラー倍（スカラーは普通の数の

こと）が定義されているという性質を加えれば、結合的環は結合的代数となる。

ここで、問う。演算に関するこれらの条件が、数学においてかくも普遍的に振る舞うのは、なぜであろうか？ 実際、例えばリー環のような他の代数的構造から議論を始めても、その理論のかなりの部分、特にホモロジー代数に関係する理論は、普遍包絡環という結合的代数を用いて理解できる。先の質問は、その質問自体は非常に重要だが、解答を系統立てて述べるのは簡単ではないだろう。

理論のホモロジー代数的な側面が十分に確立されると、今度は結合的代数の定義をDG代数、A無限代数などに拡張する必要に迫られる。いろいろなルール（定義）が定められているゲームにプレーヤーとして参加するには、基本的なルール（定義）について明確に理解しておくことが極めて重要である。ホモロジー代数の現状は､理論の基礎の明確な理解を求めている。乗法の結合性は、要するに写像の結合（合成）が結合的な操作であることに関係している。加法とスカラー倍の由来は「線型化」という概念であり、それは我々の周囲の時空が局所的には線型空間であるかのように見えるという「観測事実」の定式化に基づくと思われる。この問題は、線型性を道しるべとする量子力学の基本原理、「重ね合わせの原理」と直接的に関係していると推測することも可能である。DG代数、A無限代数の必要性は、代数の基本的な構成にホモトピーが深く関係していることをうかがわせる。最近の階型理論（Theory of Types）の発達は、数学の論理的な基礎もまた、本来的にホモトピー理論に根ざしているであろうことを示唆している。

ホモロジー代数

どのようにして数学者たちがホモロジー代数の概念に辿り着いたのかを見てみよう。まず、彼らは、結合的代数は複雑な対象であることに気がついた。その理由を探るために、結合的代数の「社会」、言ってみれば、そこで働き、テニスをし、互いに話をする、彼らの生活空間に着目する必要に迫られた。これが代数の「圏」である。「圏」に着目するということは、結合的代数たちをその間の「射」と共に観察するということである。（あるいは結合的代数たちはその社会で「射」によって“話し合う”と言える。）ここで、結合的代数の間の「射」または「準同型」とは、写像

$$f : A \to B$$

であって加法と乗法を保持するもののことである。もし代数の間の準同型の核（Aの元であってfによりBの0へ行く元全体の集合）と、像（Bの元であってfによりAから来ている元全体の集合）と、像による商が代数として同じ種類であれば、話は簡単である。核と像は代数の部分代数となるが、勝手な部分代数が準同型の核として表せるわけではない。準同型の核として表せる部分代数は「イデアル」という。すなわち、代数の部分代数であって代数の勝手な元との積に関して閉じているものである。準同型fの像は一般にはイデアルにはならず、像によるBの商を構成することは許されない。代数を学ぶことが簡単な話ではないのは、まったくこのためである。

結合性は写像の結合（合成）に由来していたことを思い出そう。すると代数の元を空間M上の写像として表現するという考えに至る。この空間に加法やスカラー倍といった線型性が想定されることは自然である。したがって我々は与えられた代数上の「加群」または「表現」という概念に至るのである。

固定された代数上の加群の「社会」、すなわち加群の圏、は代数の圏よりもずっと安定している。与えられた加群の間の準同型に対し､核も余核（像による商）も同じ代数上の加群になる。言い換えれば、固定された代数上の加群の圏は「アーベル圏」になる。

価値観を逆転させると、代数自体が重要性をもつのは、その代数上の加群の圏に関することのみであると考えることが合理的である。この考えを推し進めると「森田同値」の概念に行き着く。2つの代数は、その上の加群の圏が同値であるとき、森田同値であると

いう。代数上の加群の圏のみが代数の重要な性質であるという視点を受け入れることは合理的である。圏論の基本的な考えは、代数や代数上の加群などの多様な構造を、個々の対象としではなく、「社会」、即ち、適切な圏の構成員として捉えることにある。

ようやく我々はホモロジー代数の基礎を学ぶための準備を終えた。加群Lの部分加群Kを考えよう。LのKによる商Mには加群の構造が入る。これは、LがKとMという2つの単純な部分に分解したと考えることができる。

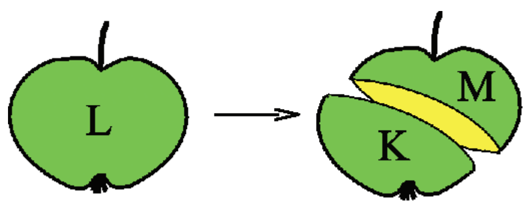

図1　加群の部分加群と剰余加群への分割。

KとMの役割は明らかに違い、この状況は「LはKによるMの拡大である」と説明される。MとKが固定されている時、このような拡大はどのように説明できるだろうか。

ホモロジー代数による基本的な所見は、全てのこのような拡大は加法群の元として数え上げられ、しかもスカラー倍が定義される（!）ということである。与えられたMとKに対する2つの拡大に対して、それらの和をとって別の同じ性質を持つ拡大を得ることができるという事実は驚くべき発見であった。これは手品のようである。黄色と緑色の2つの林檎を手に取り、それぞれを大小2つに分割し、手早くかき混ぜて、2つの小さい方の片から紅い林檎の小さい片を、2つの大きい方の片から紅い林檎の大きな片を得て、最後に併せて新しい1つの紅い林檎にしてみせる。

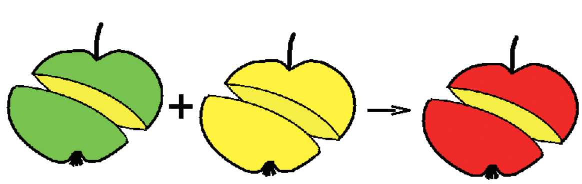

図2　拡大の和。

導来圏の魅力的な考え方は、加群たちが生活している社会、すなわち加群の圏を拡大して、子孫たちと先祖たちを含めることにより、与えられたMとKに対する拡大がMからKの第一子孫への射：

$$M \to K[1]$$

と解釈できるようにしたということである。ここでK[1]はKの第一子孫を表す。こうして拡大の和という不思議な操作は、射の和として加法圏の中で意味を持つ。元の圏の子孫まで含む圏はグロタンディークにより考え出され、「導来圏」と名付けられた。導来圏の正確な定義には、少なくとも19世紀のイギリスの数学者アーサー・ケイリー（Arthur Cayley）とドイツの偉大なダヴィッド・ヒルベルト（David Hilbert）に遡る「シジギー」（syzygy、現代の用語で「分解（resolution）」）という古い考え方が使われている。

導来圏の考え方は、実はかなり普遍的であり、研究の対象がアーベル圏をなす場合にあっては常に、他の多くの数学理論に応用される。しかし研究者にとって、導来圏を学ぶことには次のような典型的な心理的問題がある。つまり、例えば複素解析のように、それ自体が多くの詳細な技術的要素を含むある特定の分野を学習しているとき、ホモロジー代数を使う必要がある所に来たとしよう。導来圏の考え方は、あまりにも彼らの数学的な経験に直交し、あまりにも抽象的で技術的であるように見えるため、興味深い応用という島に泳ぎ着くという希望を持ってこの「敵意をむき出しにした」海に飛び込むには、本物の勇気が必要とされるのである。私から若手研究者への助言はたった一つ、「“幼稚園児”のときから岸辺で泳ぐ練習を始めなさい。」ということである。

連接層の導来圏

代数幾何学では、代数多様体などの対象は、「社会的振る舞い」という点では、代数と似ている。彼らは

アーベル圏を構成しない。したがって、もしホモロジー代数を用いたいのなら、加群の圏に相当するものを探さなくてはならない。これが代数多様体上の「連接層」の圏である。

これらの層が何であり、どのようにして「線型化」の概念から自然に現れるのかを見てみよう。滑らかな代数多様体Xを考えると、これは非常に曲がった座標系を持つ空間であるが、それをある滑らかな部分多様体Yの近傍で考えると、この代数多様体はその線形化である「法束」によってうまく近似される。次に、代数多様体は滑らかではないが、部分代数多様体は滑らかであるとすると、この近似は「あるファイバーで次元の跳躍が起こるベクトル束」のようなものになる。これが「連接層」として定式化される。例として二次の円錐XとXの中心点xを通るX上の直線Yを考えよう。Yの各点における法束のファイバーは、ファイバーが2次元平面になる中心点を除いて、直線になる。

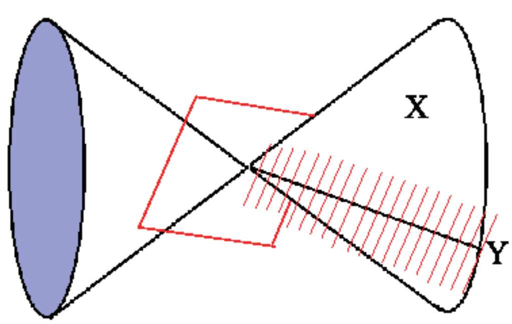

図3　YのXにおける法束のファイバーの次元の跳躍。

この連接層のファイバーの次元の跳躍は、常にYの部分代数多様体上で起こる。これをY_1とすると、さらに次元の高い跳躍がY_1の部分代数多様体上で起こるかもしれないし、さらに同様のことが次々と起こるかもしれない。

連接層の方が、ベクトル束よりも、ある意味取り組みやすいというのは驚きかもしれない。彼らはアーベル圏という秩序だった「社会」に属しているので、比較的素直な性格を持つ。したがって、導来圏のからくりは彼らにも応用できて、「子孫」と「先祖」を含めることにより連接層の導来圏を得る。

グロタンディークの導来圏の概念は、ジャンルイ・ヴェルディエ（Jean-Louis Verdier）を始めとする彼の多くの弟子により、確固とした基礎付けがなされ、非常な発展を遂げた。古典的な代数幾何学と最も関係のある導来圏である、代数多様体の連接層の有界な導来圏の重要な形式的特性は、特にリュック・イリュージー（Luc Illusi）の論文で精査されたが、代数多様体の連接層の導来圏の構造は全く不明瞭なままであり、代数多様体の幾何学との関係は何十年にも渡り未知であった。

グロタンディークの概念はフルシチョフによる「雪解け時代」にユーリ・マニン（Yuri Manin）により「鉄のカーテン」を越えてロシアに持ち込まれた。マニンは1960年代にグロタンディークと会い、これらの新しいホモロジー代数の概念の重要性を十分に理解した。マニンおよびモスクワにいた彼の弟子たちと同僚は、導来圏の概念を調べ、いくつかの代数多様体について連接層の導来圏の研究を開始した。

モスクワの状況はパリと似ていた。マニンのセミナーでは導来圏を使って代数多様体の形式的・位相的・数論的な性質を研究していたのに対し、シャファレヴィッチ（Shafarevich）のセミナーおよびアンドレイ・チューリン（Andrej Tyurin）やワシリー・イスコフスキー（Vassily Iskovskih）のような、彼の学派の主だった人たちの多くはイタリア風の古典的な代数幾何学を研究していた。彼らの研究が交わることはなかったが、フランスほど根深く分裂していたわけではなかった。明らかにホモロジー代数の趣きを有する、インスタントンの古典的な幾何学に関するアティヤ-ドリンフェルト-ヒッチン-マニン（Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin）の論文という際立った業績を思い起こせば十分である。導来圏が表現論に活発に応用されるようになったことも言及に値する。最も目覚ましい業績の一つは、ベイリンソン（Beilinson）とベルンシュタイン（Bernstein）が得た、また独立にブリリンスキー（Brylinski）と柏原も得た、1980年代初めのカジュダ

ン・ルスティック（Kazhdan-Lustig）予想の証明である。

導来圏の研究には明確な概念的論理があり、双有理幾何学と低次元代数多様体の研究結果には明らかに深いものがあった。もっとも、これらの結果は種々雑多に見え、当時の私のような初学者には理解の難しいものであった。

ある時私は、もし圏を代数多様体の不変量として考えれば、古典的な代数幾何学の現代における様々な発展は、代数多様体上の連接層の導来圏を通して理解できるかもしれないと気がついた。直ちに自然な疑問が生じてきた。この不変量からどのようにして情報を取り出せば良いのだろうか? 代数多様体と代数多様体上のベクトル束の普通の不変量、例えばホッジ・コホモロジーやチャーン類を復元できるのだろうか? 導来圏から元の代数多様体を復元できるのだろうか? 例えば双有理変換といった様々な幾何的な操作により、導来圏はどのように変換を受けるのだろうか?

いくつかの代数多様体の圏は、exceptional collectionsと呼ばれる計量線型空間の正規直交基底のような基底を持つことが分かった。もっとも、計量とは言っても交代対称（あるいは歪対称）ではなく、むしろ非対称的で、半正規直交性と言う方がより適切なアナロジーかもしれない。半正規直交基底はその要素に順序づけられた添字を持つ。順番を変え、グラム・シュミット（Gramm-Schmidt）の正規直交化と似た（準）正規直交化操作を施すことにより、基底の集合に対して組みひも群の作用があることが直ぐに分かる。これは導来圏とホモトピー理論とが深く関連していることをうかがわせる。

導来圏を抽象的な三角圏として考え、そこから情報を得ようとすると、この圏の射がアーベル圏の場合とは違い核や余核を持たないということに起因する問題が生じる。私はこれに対して有用な手段をミハイル・カプラノフ（Mikhail Kapranov）と共に発見した。それはSerre 関手（functor）であり、代数多様体の標準因子類の圏論的な実現である。私はそれを用いて導来圏とチャーン指標（Chern character）からホッジ・ダイアモンド（Hodge diamond）の縦列を復元することに成功した。導来圏の不変量がホッジ・ダイアモンドの横列ではなくて縦列であるということが分かったのは、実に印象的であった。というのも、横列は代数多様体の特異ホモロジーに起因することから横列の方が意味を持つというのが標準的な「理解」であったからである。3次元カラビ・ヤウ（Calabi-Yau）多様体の横列と縦列が対称性により交換されるというミラー対称性予想がこの時には世に現れていた。私は導来圏がミラー対称性において中心的な役割を果たすはずであると予想した。これは、後に、複素代数多様体の導来圏と、そのミラー対称であるシンプレクティック多様体の深谷圏を比較することを提案したマキシム・コンセヴィッチ（Maxim Kontsevich）により、ホモロジカルミラー対称性として、より正確な形で定式化された。

代数多様体が十分多くの標準類（canonical class）または反標準類（anti-canonical class）を持つという条件の下で、代数多様体を導来圏から復元できることを、私はドミトリー・オルロフ（Dmitry Orlov）と共同で証明した。一方で、向井 茂の論文によりK3曲面とアーベル多様体については導来圏同値の例が知られていた。我々は、森 重文の極小モデル理論（Minimal Model Program）での特別な双有理変換の下で、導来圏は良い振る舞いをすることを見出した。そして、いわゆるフロップ（flop）変換の下では導来圏は同値であり、その一方でフリップ（flip）は導来圏の間の充満忠実関手（fully faithful functors）を誘導すると我々は予想した。これは、適切な意味でより良く極小化されるべきは導来圏であると解釈することにより、極小モデル理論に対して新しい視点を与えた。トム・ブリッジランド(Tom Bridgeland)、川又雄二郎らにより予想を支持する結果が得られているが、その証明の達成にはまだ程遠い。

導来圏を代数多様体の基本的な不変量だと考える場合、滑らかな代数多様体上の連接層の導来圏のクラ

スを特徴づける圏の性質は何かという疑問が自然にわいてくる。私はこれらの圏のいくつかの良い性質を、割と直ぐにミハイル・カプラノフと、また後にミシェル・ファンデンベルク（Michel Van den Bergh）との共同研究で見出した。代数多様体のクラスを少し拡張した代数空間にもこのような性質が見受けられる。ベルトランド・トーエン（Bertrand Toen）とミシェル・ヴァキエ（Michel Vaquie）が、もし複素多様体の導来圏がこの性質を満たすならば、この多様体は代数空間であることを証明した。

他方、連接層の導来圏のクラスを区別するような、抽象的な圏の簡単に定式化できる性質はない、ということは当初より明らかであった。私は1990年代初め、上に述べたような良い性質を満たす圏ではあるが、幾何学的な対象の導来圏にはなっていないような全ての圏を、非可換多様体からの像とみなすべきであるというアイディアに達した。この方向で多くの結果が得られたにもかかわらず【例えばアレクサンダー・ポリシュチューク（Alexander Polishchuk）との非可換射影空間の分類に関する共同研究（それ以前のアルティン（Artin）、テイト（Tate）、ファンデンベルクの研究に影響を受けた）やファンデンベルク、スタフォード（Stafford）らによる非可換ブローアップ（blow-up）に関する研究】、可換な場合の結果に比べると非可換な圏論的代数多様体の幾何学は未だに包括的理解には程遠い。可換代数のホッジ・コホモロジーと類似した圏の不変量をよく理解することは、必ずやこの目的の助けになるであろう。

将来を考えると、滑らかな代数多様体とそれらの間の充満忠実な関手を射にもつような圏、及びその適当な拡張を考え、それらの「社会」の構造をホモトピー理論により捉えようとすることが適切と思われる。連接層の導来圏の対象たちは、トポロジカルな弦理論におけるBモデルの境界条件として解釈される。したがって、この構造の適切な理解は、弦理論における時空の可能なコンパクト化を見通す上で、洞察を与えるであろう。