FEATURE

Kavli IPMU 主任研究員 **小林俊行**
こばやし・としゆき
専門分野：**数学**

局所から大域へ
―リーマン幾何を超えた世界で―

局所から大域へ

「木を見て森を見ず」とは局所的な所だけにとらわれていると全体が見えないことを戒める諺です。でも、本当にそうでしょうか？ ひょっとすると、名探偵のような視点で木（局所）を観察すれば、森の形（大域）の“何か”は読み取れるかもしれません。

古典的な数学の時代では、小さなスケールで起こることや局所的な座標を用いて説明できることが主に研究されていました。現代の数学では、大きなスケールで起こることに関心の対象が拡がり、それに向けてさまざまな数学概念や手法が開発されてきています。しかし、一般には大域的な現象を理解するのは大変難しいことです。

幾何学において局所的な構造を指定したとき、「大域的な形としてはどの程度の自由度があり、どのような制約を受けるか？」という問は

局所 $\rightsquigarrow$ 大域的な形

というモチーフの典型的なものです。このモチーフは、とりわけリーマン幾何学の範疇で、20世紀の幾何学の大きな潮流となり発展を遂げてきました。一方、リーマン幾何学の枠組を超えた場合には、局所から大域への研究は、この大きな潮流に乗り遅れた感がありました。

「局所から大域」といっても、どのような局所的性質に着目するかによって、それに関わる数学の分野が大きく異なります。

局所性として“均質”という性質に着目すると、リー群論や整数論との結びつきが強くなり、**不連続群**とよばれる離散的な代数構造が大域的な形を統制する主役になります。

リーマン幾何の範疇での不連続群の研究においては、1950年代以降、セルバーグ（Selberg）、ヴェイユ（Weil）、ボレル（Borel）、モストウ（Mostow）、マルグリス（Margulis）等の華やかな活躍があり、[1] 対称空間・リー群論・整数論から微分幾何学・トポロジーにまたがる不連続群の研究が大きく発展しました。

1980年代の半ばごろより、私はリーマン幾何学の枠組を超えた空間に対する不連続群の一般理論を作ろうという試みを始めました。リーマン幾何とは対照的に、“自然な距離”が存在しない世界では、研究手法そのものも開発する必要があります。当時は興味を示す研究者は殆どおらず、孤独ではありましたが何をやっても新しい発見になりました。1990年代以降には、いろいろな分野の数学者もこの新しいテーマに参入し、（非可換）エルゴード理論・ユニタリ表現論・微分幾何学など数学の異分野と思いがけない繋がりも生まれてきています。国際数学年の2000年には、「（非リーマン幾何における）局所均質空間」というテーマが21世紀の新しい数学の挑戦課題の一つとして紹介

[1] A. Selbergは1950年にフィールズ賞、A. Weilは1994年に京都賞、A. Borelは1992年にBalzan賞、G. Mostowは2013年にWolf賞、G. Margulisは1978年にフィールズ賞、1995年にフンボルト賞をそれぞれ受賞しました。

され（文献［1］）、その後もこのモチーフは深化し続けています。

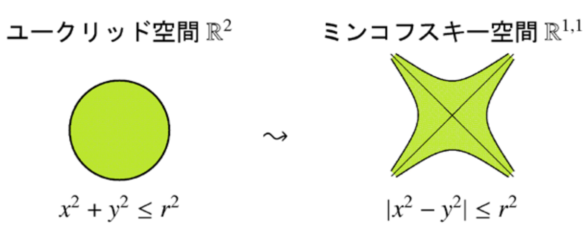
本稿では、厳密さは多少犠牲にして数学の専門用語をできるだけ持ち込まず、リーマン幾何の枠組を超えた局所均質空間の大域幾何と、最近手がけ始めたスペクトルの研究（大域解析）の雰囲気を伝えてみたいと思います。

不定符号の微分幾何学

擬リーマン幾何は、リーマン幾何や相対性理論の時空を記述するローレンツ幾何を特別な場合として含む概念です。その入り口を紹介しましょう。$p+q$ 次元のユークリッド空間において、不等式

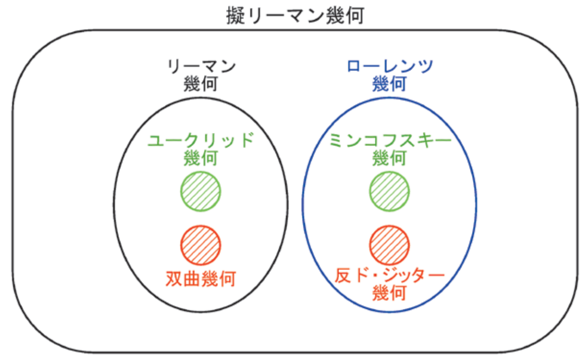
$$|x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2|\leq r^2$$

で表される領域を**擬球**と言います。下図はユークリッド空間の球（$(p,q)=(2,0)$）とミンコフスキー空間の擬球（$(p,q)=(1,1)$）を2次元の場合に表示したものです。より一般に、符号 (p,q) の非退化な2次形式 $Q(x)$ を用いて $|Q(x)|\leq r^2$ と表される領域も擬球と呼ぶことにしましょう。



擬リーマン幾何では、局所座標で（正確には各点ごとに無限小のレベルで）このような擬球を尺度とする空間（**擬リーマン多様体**）を扱います。$q=0$ の場合の空間が**リーマン多様体**、$q=1$ の場合が**ローレンツ多様体**です。

一般の擬リーマン多様体においても、勾配（grad）、発散（div）、ラプラシアン（Δ = div ∘ grad）、曲率などの概念を定義することができます。



さらに、リーマン多様体、すなわち $q=0$ の場合には $Q(x)$ が正定値なので（無限小の）尺度から積算することによって2点間の距離を定めることができます。これとは対照的に、$p,q\geq 1$ の不定符号の擬リーマン多様体においては、“自然な距離”は存在しません。

旅人は戻ってくるか?

地球は丸い。西方へひたすら進み続けた旅人はやがて東から戻ってくることでしょう。ところで、もし、旅人が地球の形や大きさという大域的なことを知らないとすると、自分が元の地点の辺りまで再び戻れるかどうか知るすべはあるのでしょうか?

数学では空間の無限小レベルの曲がり方を曲率という量で表します。歴史を遡ると、曲率は19世紀にゲッチンゲンの天文台長として測地学にも多大な貢献をした数学者ガウスが導入したものです。2次元の曲面に対しては、曲率と局所的な形には以下のような明瞭な関係があります。

曲率が正 ⇔ 局所的に凸または凹、

曲率が負 ⇔ 局所的に馬の鞍のような形。

高次元の空間の曲率には3種類あり、情報量の多い方から並べると、断面曲率、リッチ曲率、スカラー曲率となります。

曲率は**大域的な形**にどのような影響を及ぼすのでしょうか? リーマン幾何において「局所から大域へ」の理論の嚆矢となったマイヤー（Myers）の古典的な定理（1941）は（どんな次元であっても）「リッチ曲

率が 1 以上ならば、どの2点をとってもその距離は π 以下になる」と主張しています。地表の曲がり方（局所的な情報）から、地球の直径という大域的な量に関する情報が得られるというわけです。「局所的に凸に曲がっていれば､全体としても球のように閉じている」という定理は日常的な感覚とも合致しています。

一方、曲率が負の場合、あるいは、ローレンツ幾何において、一様に曲がった空間の中をひたすら進む旅人は元の場所に戻ってこられるでしょうか? 次節から、“日常の感覚” では簡単に捉えられない不思議な世界のお話がはじまります。

曲がり方が均一な幾何

断面曲率が一定の擬リーマン多様体は、微分幾何のモデルとして重要な役割を果たすことから空間形と呼ばれます。曲率が一定という性質は局所均質性の特別な一つの例であり、また、空間形はその高い対称性から数学のさまざまな分野と結びついています。

リーマン幾何では、球面、ユークリッド空間、双曲空間が、それぞれ、曲率が正、零、負の空間形です。双曲空間はユークリッド幾何における平行線の公準が成り立たない非ユークリッド幾何の最初の例として、19世紀前半に歴史的な役割を果たしたことでも知られています。断面曲率 −1 のリーマン多様体である双曲多様体の理論は、3次元の場合はクライン群の理論と等価であり、現在も活発に研究されています。

リーマン幾何の枠組を超えたもっとも簡単な場合であるローレンツ幾何では、ド・ジッター多様体、ミンコフスキー空間、反ド・ジッター多様体が、それぞれ、曲率が正、零、負の空間形です。

閉じた “宇宙” は存在するか?

局所的にはどの点においても一様な曲がり方をしていて、しかも大域には閉じている空間は存在するでしょうか?[2]

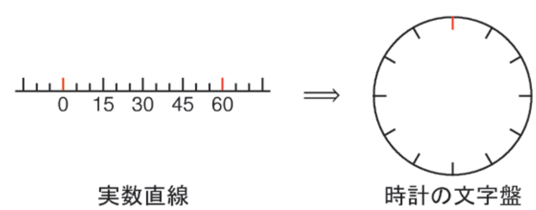
“凸に曲がっている” という概念を一般化した正の曲率の空間形では、次の定理が成り立ちます。

定理1 (1)（リーマン幾何）必ず閉じている。
(2)（ローレンツ幾何）決して閉じない。

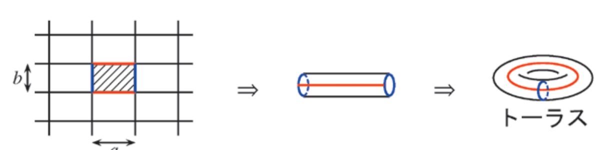
定理1(2)は、第一発見者の名前を取って、カラビ＝マルクス現象と呼ばれています（文献 [2]）。

一方、負の曲率の空間形を普通に構成すると、無限に広がり、閉じていない形になってしまいます。これを “折り畳んで” 閉じた形を作るためのアイディアについて、1次元と2次元のユークリッド空間で初等的に説明してみましょう。

実数直線は閉じていない図形ですが、60分で一周する時計の文字盤は閉じた図形になっています。実数直線で時刻を表しても、時計の文字盤で時刻を表しても局所的には同じ時を刻みます。このように、局所的には同じでも、大域的には異なる図形があり得るのです。

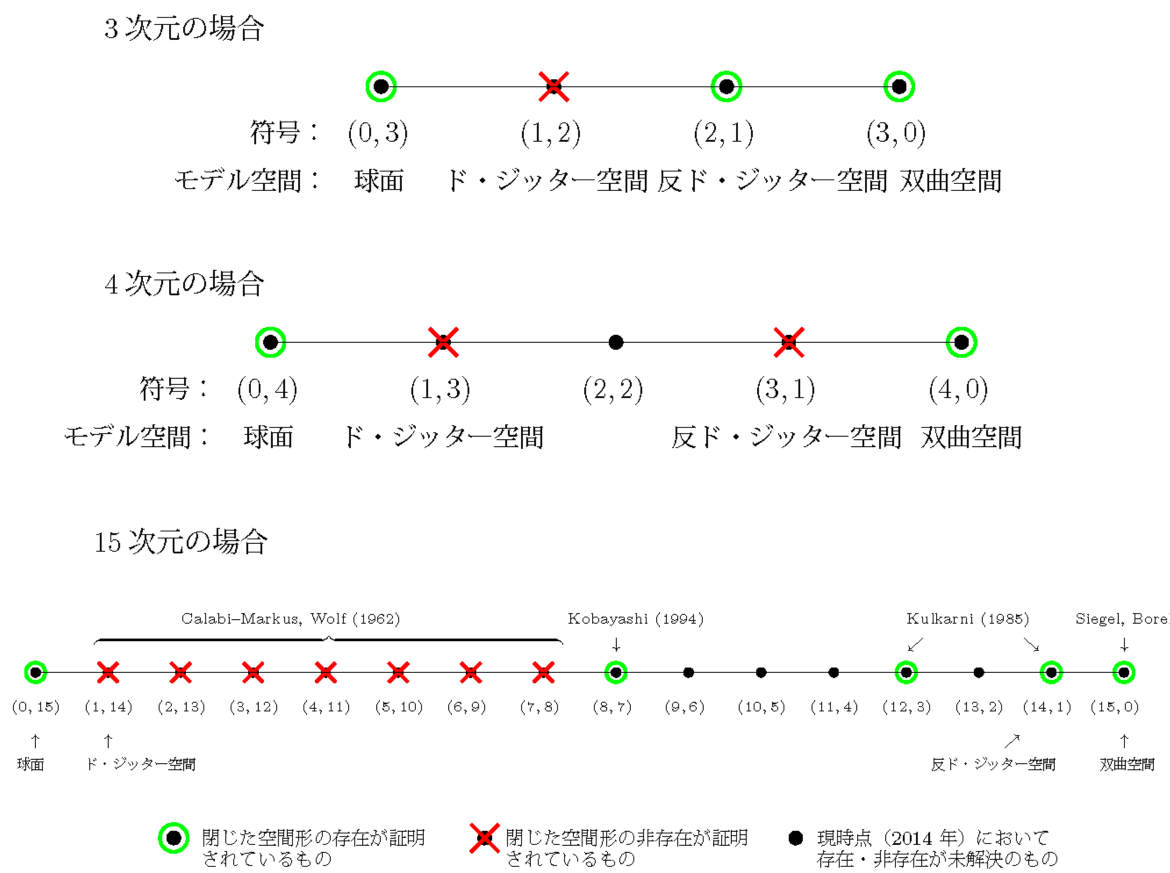


次に、同じことを2次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ で考えてみます。水平方向にも上下の方向にも周期があるとすると、周期を表す長方形で平面を埋め尽くすようなタイル貼りをすることができます。この長方形の両端の点も一周期で同一視すると、長方形の両端を貼り合わせて、トーラス（ドーナツの表面）という閉じた空間が得られます。



[2] 数学用語で厳密に言えば､「コンパクトかつ断面曲率が一定の擬リーマン多様体は存在するか？」と定式化できる

符号 (p,q) の不定計量，断面曲率 $\equiv -1$ の閉じた空間形は存在するか？



これらの初等的な例の背後にある重要な原理は

A.　周期を表す代数構造（不連続群 $\mathbb{Z}^2$）

B.（長方形による）タイル張り

です。 一般の状況では非可換の構造が入ってくるので、はるかに難しくなりますが、AあるいはBに相当する構造をみつければ、「局所性を保ったまま、異なる大域的な形を生み出すことができる」と期待できます。

負の曲率の、閉じた空間形の存在問題については、次の定理が成り立つことが知られています。

定理2 (1)（リーマン幾何）どの次元でも存在する。
(2)（ローレンツ幾何）奇数次元に限って存在する。

実際、定理2における存在証明は、Aの考え方で行列の中に整数点を見出す方法（算術的部分群）によって与えられます。また、定理2(1)の場合には、モストウ、ヴィンバーグ（Vinberg）、グロモフ（Gromov）＝ピヤテスキー・シャピロ（Piateski-Shapiro）がBの考え方で負の定曲率の閉じた空間形（双曲多様体）の別の構成法を与えています（非算術的部分群）。一方、ローレンツ計量の場合に、次元が奇数か偶数かの差異がでることは、「頭には必ずつむじが存在する」という定理の証明と同様にトポロジーの手法で論証されます。

定理1と定理2のいずれにおいても、「局所 ⇝ 大域」に関して、リーマン幾何とローレンツ幾何には著しい

違いがあることを主張しています。もっと一般の符号 (p,q) $(p \geq q \geq 2)$ に対する擬リーマン幾何についてはどうでしょうか? カラビ=マルクス現象を一般化することにより、正の曲率の場合は閉じた空間形が存在しないことが証明されます。一方、負曲率の場合にはどのような整数 p,q に対して閉じた空間形が存在するかという問題は、まだ完全には解決していない難問です。部分的に解決した場合として、符号が $(4,3)$ の7次元の場合や符号が $(8,7)$ の15次元などの場合には閉じた負曲率空間が存在することが証明されています。

前頁の表では閉じた空間形の存在問題に関して何が現在知られていて何が未解決かを3次元、4次元、15次元の場合にまとめてみました（文献［4］）。

剛性と変形

一つの大域構造の中に同種の局所幾何構造が唯一つしか入らないとき**剛性定理**が成り立つといいます。逆に、同種の幾何構造の入れ方に自由度があるときは、その自由度そのものを研究対象にすることができます（**変形理論**）。

リーマン幾何の範疇では、剛性定理が成り立つ状況が多いのですが、その例外として、閉じた曲面上には曲率が −1 のリーマン構造（双曲構造）で相異なるものが連続無限あることが知られています。これを記述するパラメータ空間は**タイヒミュラー空間**と呼ばれ、関数論・双曲幾何から弦理論などさまざまな分野に現れる重要な概念です。この場合には大域的な形を統制する不連続群は $SL(2,\mathbb{R})$ の離散部分群（フックス群）なので、タイヒミュラー空間はフックス群の変形をパラメータ付けしているという捉え方もあります。

不定符号の擬リーマン幾何では、リーマン幾何の範疇とは異なり、もう少し“やわらかく”なります。この発見を掘り下げた擬リーマン局所均質空間の不連続群の変形理論は、今後の発展のポテンシャルが高いと期待しています（文献［1］）。

低い音は大きな楽器で —スペクトル幾何—

「物の形」を対象とする幾何学と、「その上の住人」（例えば、関数）は等価であるという壮大な視点があります。今では常識と言えるほど現代数学に溶け込んだこの視点は、代数幾何学をはじめ多くの分野で姿・形を変えて現れます。

そこで、同じ局所性をもつが、大域的には異なる幾何に対して、「その上の住人」はどのような差異があるか? という問を考えてみましょう。

張力が一定の弦では、弦を少しずつ長くすると音が段々と低くなります。これは、実数直線上で L を周期とするラプラシアンの固有関数を考えたとき、周期が大きくなると固有値が小さくなるということに対応しています。例えば、三角関数 $f(x) = \sin(2\pi x/L)$ は周期 L をもち、

$$-\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{4\pi^2}{L^2}f(x)$$

を満たします。従って、周期 L が大きくなっていくと固有値 $4\pi^2/L^2$ は小さくなっていきます。

リーマン幾何でも同じ現象が成り立ちます。2次元の閉じた双曲多様体のラプラシアンの固有値を

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

と小さいほうから並べてみます。このとき、双曲構造という局所的な構造を保ったままリーマン計量を連続的に変形すると、すべての固有値 λ_k $(k = 1,2,\ldots)$ が動くことが知られています（文献［5］）。すなわち、固有値はタイヒミュラー空間上の関数とみたとき、それは定数でありえないのです。

閉じた双曲多様体上の関数はポアンカレ上半平面上の関数でフックス群（不連続群）を周期とするものと同一視できるので、双曲多様体（リーマン幾何）ではこの例は、固有値が周期という大域構造に依存して変動する、ということがわかります。

形を変えても音が変わらない楽器

リーマン幾何学の枠組を超えた世界では、局所均質空間の“住人”たる大域解析は謎に包まれた未踏の地です。そこへ踏み入る第一歩としての研究の中で、次のような面白い現象を発見しました。

定理3 三次元の閉じた反ド・ジッター多様体では、ラプラシアンの固有値で不動なものが無限個存在する。

この定理は“周期（大域的な量）が変わればすべての固有値が動く”という「常識」が成り立たないという現象をとらえています。なお、前節で述べた2次元の閉じた双曲多様体のように、標準的な閉じた反ド・ジッター多様体では、“動く固有値”も無限個存在します。

三次元の反ド・ジッター多様体を楽器に譬えれば、弦を長くしたり細くしたりしても、音程が変化しないで響き続ける“普遍的な音”が無限個あり、それと同時に、（常識通りに）変化する音も無限個あるような楽器なのです！

定理3で見出した新しい現象は、高次元の場合にも、また不定値ケーラー計量をもつ局所対称空間でも起こります。その一般理論は140ページに亘る大部の第一論文［6］で

- 偏微分方程式・積分幾何学・非可換調和解析
- 大域的な対称性を統制する不連続群の定量化

などを主な手法として証明しました。さらに

- 無限次元の対称性の破れに関する**分岐則の理論**

を援用し、無限次元の表現論と局所均質空間の大域幾何を橋渡しする第二論文を執筆中です。

さて、局所均質空間 $\Gamma\backslash G/H$ を舞台とした大域解析は、半世紀以上にわたって以下のような特別な場合には、数学の重要な分野として大きく発展してきました。

- Hがコンパクト（リーマン幾何）の場合 —整数論における保型関数の理論（Γ は算術的部分群）
- Γが無限群ではなく、単位元のみの自明な場合 —ゲルファント (Gelfand), ハリッシュ・チャンドラ (Harish-Chandra), 大島利雄…と系譜が続く非可換調和解析学

一方、本稿で扱ってきた不思議な幾何は、局所的にはリーマン幾何学の枠組を超え（H はコンパクトではない）、大域的には不連続群 Γ が無限群であるというもっと広い設定を舞台にしています。この不思議な幾何の“住人”を対象にした、スペクトル解析はどのような謎を秘めているのでしょうか? この未踏の地の面白い将来を示唆するような遠い彼方のきらめきが、ちらっと見え始めたように感じています。

文献

[1] 数学の最先端・21世紀への挑戦,「非リーマン等質空間における不連続群論」(T. Kobayashi 第1巻),「剛性理論における問題と予想」(G. Margulis 第6巻), 原著: Springer-Verlag, Amer. Math. Soc. (2000), 邦訳: 丸善出版.

[2] E. Calabi and L. Markus, Relativistic space forms, Ann. of Math. (1962).

[3] T. Kobayashi, Proper action on a homoge- neous space, Math. Ann. (1989).

[4] T. Kobayashi and T. Yoshino, Compact Clifford-Klein forms –revisited, PAMQ (2005).

[5] S. Wolpert, Disappearance of cusp forms in special families, Ann. of Math. (1994).

[6] F. Kassel and T. Kobayashi, Poincaré series for non-Riemannian locally symmetric spaces, 141 pp. arXiv: 1209.4075.