

# 研究会「原始形式とそれに関連する諸課題」

齋藤恭司 さいとうきょうじ

Kavli IPMU 主任研究員

表記の研究集会（組織委員：堀健太郎、Changzheng Li、Si Li、齋藤恭司）が2月10日－14日にKavli IPMUにおいて開催されました。研究会は数学と物理学にまたがるテーマであるミラー（鏡像）対称性予想の、ある現状を反映するもので、広範な参加者を得て活発な討論が行われました。以下に、その歴史的背景を含む研究会の概要を述べます。

古典的な楕円積分論をモデルとしながら、原始形式とその周期積分の理論が導入されました（K. Saito 1983）。ここで原始形式とは、ある開多様体上に高々有限個の臨界点をもつような関数  $f$  が与えられたときに、その  $f$  の普遍変形族  $F$  を考えて、その  $F$  の定まる全空間上で定義される相対次数が最高の微分形式の、あるクラスのことです。すると、 $F$  の等高面へ原始形式の剰余類である微分形式を取り、それを  $F$  の消滅サイクル上で積分することにより高次元の周期積分の理論（楕円積分論の一般化）が構成されるのです。より詳しくは、原始形式は高次剰余理論から定まる、無限個の双線形方程式系を満たすことを要請します。

原始形式はKavli IPMUにおけるMath-StringセミナーやTopological Stringセミナーにおける研究テーマとなっています。それは以下に述べるように、元来は数学の理論であった原始形式の理論が、物理の量子場の理論においては関数  $F$  をスーパーポテンシャル関数としてもつLandau-Ginzburg

理論の複素幾何学的側面（B-モデル）を記述するものだからです。即ち、位相的な場の理論におけるミラー対称性の立場から見ると、原始形式の理論はシンプレクティック幾何学的側面（A-モデル）におけるコンパクトケーラー多様体上に定まるGromov-Witten理論（1990）やLandau-Ginzburg軌道上に定まるFan-Jarvis-Ruan-Witten理論（2007）などの他の理論にミラー対称なB-モデル的対応物であると考えられるからです。

このことは厳密には次の様に定式化できます。まず、原始形式はその定義より関数  $F$  の変形のパラメータ空間に平坦構造と呼ばれる微分幾何学的構造（ある種の可積分条件を満たすような平坦計量と接空間上の環構造の組のことで、それは後にフロベニウス多様体構造と公理化される：Dubrovin 1990）を定め、その結果、その構造の母関数となるプレポテンシャル関数がパラメータ空間上に定義されます。するとミラー対称予想の一つの数学的に厳密な定式化は、「**原始形式から得られたプレポテンシャル関数はそのミラー側（即ち、Gromov-Witten理論やFJRW理論）から得られたプレポテンシャル関数と一致する。ここで、パラメータ空間の同一視はミラー写像と呼ばれ、平坦座標系を用いることにより達成される**」ということを問うものです。

しかし、このようなミラー対称予想の検証は近年に至るまで達成されていませんでした。それは、原始形式

は理論的に存在することは知られていましたが、その具体形は単純特異点と単純楕円特異点の二つの場合（K. Saito 1983）以外に知られていなかったからです。それらの古典的な場合について、ミラー対称性予想は近年（単純特異点の場合 Fan-Jarvis-Ruan 2007, 単純楕円特異点の場合 Krawitz-Shen 2011, Milanov-Shen 2012）検証されました。特に、楕円特異点の原始形式の理論については、パラメータ空間の点の取り方に依りて、その近傍ではGromov-Witten理論にもFJRW理論にもミラー対応することが観察されています。

昨年には原始形式とそのミラー対称性を巡って次のような進展が見られました。

- 1) トーリックな場合におけるノビコフ環上（即ちシンプレクティック側）の原始形式の構成に向けて（Fukaya-Oh-Ohta-Ono）
- 2) 多重ベクトル場を用いて原始形式とBCOV理論との統一的な扱い（Li-Li-Saito）
- 3) 原始形式の摂動論的構成（Li-Li-Saito）  
特に3)の応用として
- 4) セントラルチャージが1より大なる場合を含む広いクラスの特異点に対する摂動的なプレ・ポテンシャルの決定が可能となり、広範なミラー対称性の検証が行われたこと（Li-Li-Saito-Shen）。

これ等の最近の進展を踏まえて、

本研究会が開催されました。研究会は

A. 3つの基本講義

- Lecture I (given by K. Ono, H. Ohta, and K. Fukaya): Frobenius manifold structure and Lagrangean Floer theory for toric manifolds
- Lecture II (given by T. Jarvis): Introduction to FJRW-theory and a mathematical approach to the Gauged Linear Sigma Model
- Lecture III (given by S. Li): LG-model via Kodaira-Spencer gauge theory

B. 10の研究講演

- S. Barannikov: On the non-commutative Batalin-Vilkovisky formalism and EA matrix integrals
- A. Takahashi: From Calabi-Yau dg categories to Frobenius manifolds via primitive forms
- K. Hori and M. Romo: The parameter delta
- H. Fan: Analytic construction of

quantum invariant of singularity

- Y. Zhang: On the genus two free energies for semisimple Frobenius manifolds
- A. Losev: K. Saito theory of primitive form, generalized harmonic theory and mirror symmetry
- H. Iritani: Gamma Conjecture for Fano manifolds
- Y. Shen: Mirror symmetry for exceptional unimodular singularities
- T. Milanov: The phase form in singularity theory
- D. Pomerleano: Deformation theory of affine symplectic manifolds

C. 7のショートコミュニケーション

- Y. Shiraishi: On Weyl group and Artin group associated to orbifold projective lines
- N. Priddis: A Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence for the mirror quintic
- M.R. Rahmati: Hodge theory of

isolated hypersurface singularities

- B. Bychkov: On the number of coverings of the sphere ramified over given points
- M. van Garrel: Integrality of relative BPS state counts of toric Del Pezzo surfaces
- S. Sugiyama: On the Fukaya-Seidel categories of surface Lefschetz fibrations
- A. Bondal and I. Zhdanovskiy: Critical points of a functional and orthogonal pairs of Cartan subalgebras  
により構成されました。

本研究会の参加者はアジア、ロシア、ヨーロッパおよびアメリカを含む世界各地から80名を超え、極めて活発な討論が行われました。研究会は理論の現状を示す一方、理論の更なる発展方向、例えば 1) ミラー対称性の幾何学的理解に向けてや、2) 原始形式の圏論的構成に向けて、などを示唆する非常に有益なものでした。

