FEATURE

Kavli IPMU准教授 **トードル・ミラノフ**
Todor Milanov
専門分野：**数学**

交点数と微分方程式

はじめに

現代幾何学の最も基本的な概念の一つは多様体を考えるということです。数学について特段の訓練を受けたことのない人は、これまで多分この言葉を聞いたことはないと思われます。これから多様体とは何かを説明しますが、まずそれは私たちの周りの空間の特定の部分と考えることができるということから始めましょう。例えば、両親が見ていない間に小さな女の子が壁に描いてしまった丸い輪とか、サッカーのボールの表面とかです。宇宙全体だって構いません。多様体を見ることができるなら、その形を思い浮かべることは簡単ですが、ほとんどの場合、それはできません。例えば、私たちに見える宇宙は、そのほんの小さな一部分だけです。それから推し量ると宇宙は箱のように見えますが、本当の形は全然違うかもしれません。数学では、私たちが思い浮かべることのできないものを扱う方法の一つに、不変量と通常呼ばれている、幾何学的性質をできる限り捉える「数」を見つけるということがあります。いわゆる「グロモフ-ウィッテン不変量」は、過去20年、非常に熱心に研究されてきた不変量です。その起源は、数え上げ代数幾何学の古典的な問題に遡りますが、近年の超弦理論の進展のおかげで非常に興味深いものになりました。超弦理論は量子力学と重力の統一を目標とします。そのアイディアの主要な点は、素粒子を小さなひもで表現することです。この場合、素粒子の軌跡は線ではなく、面となります。与えられた多様体の中にどのような種類の曲面が何個あるかを決定する問題が、物理でも非常に重要となる理由が、これなのです。私は本稿で超弦理論の顕著な予言の一つについて書いてみたいと思います。それは、数学の2つの非常に異なる分野の間に関係があることを示唆するという意味において、統一する力をもつものです。

多様体とは何か?

まず線形ベクトル空間と呼ばれる基本的なものを考えましょう。例として直線、平面、3次元空間を思い浮かべることができます。一方、これらの空間を座標を用いて考えることもできます。つまり、任意の点を原点とする1本（直線の場合）、あるいは互いに垂直な2本（平面の場合）または3本（3次元空間）の軸を選び、座標系を描きます。すると、どの点も、その点のそれぞれの座標軸への射影に対応する座標をもちます。このようにして、直線は実数全体と同じになります。平面は2個の実数のペア全体と同じであり、3次元空間は3個の実数の組全体と同じになります。

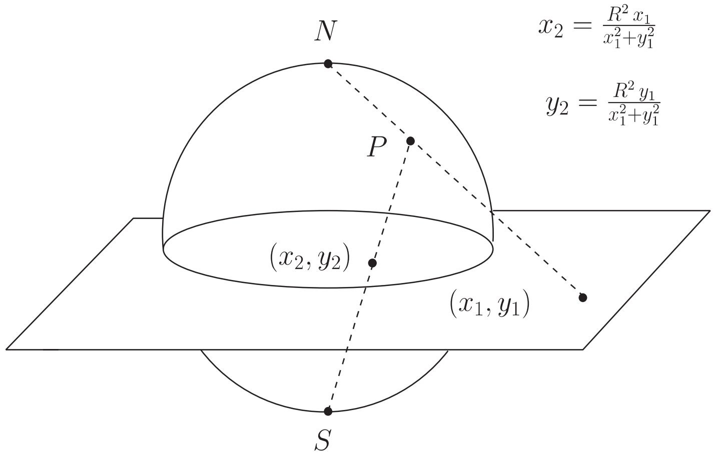


図1　半径 R の球面の局所座標系と（8個の三角形による）三角形分割。

次元は座標軸の数に対応します。私たちは3次元を超える次元を思い浮かべることはできません。ですから、4次元の線形ベクトル空間がちょうど4個の実数の組全体ということを除き、どういうものか語ることができません。

多様体は線形ベクトル空間を貼り合わせて作られます。一番簡単な例は円ですが、これからお話しする内容にふさわしいのはその次に簡単な例である球面の方なので、これを説明することにしましょう。球面から北極点 N を取り除くと、残りの球面上の全ての点 P は、直線 NP と赤道面の交点を見れば分かる（図1参照）ように、赤道面上の唯一の点に対応します。言い換えると、この約束によって、北極点 N を除く球面上の全ての点を赤道面で（点 (x_1, y_1) が点 P に重なるように）包むことができます。（ここで、赤道面は自由に延び縮みし、曲げることができるものとします。）南極点 S についても同様のことができます。つまり、2つの平面を曲げて貼り合わせると球面になります。ただし、2つの平面は、2点 N と S を除き、球面上のあらゆる点で重なり合うことに注意して下さい。少し専門的になりますが、今述べたことを座標を使って言うと、こうなります。(x_1, y_1) と (x_2, y_2) を座標とする点は、それぞれ直線 NP 及び SP と赤道面の交点ですが、それらの点を貼り合わせると点 P が得られます。座標 x_2 と y_2 は x_1 と y_1 によって表すことができます（答は図1を見て下さい）。ここでは厳密な公式は必要ありません。要点は、貼り合わせという操作は一つの線形ベクトル空間の座標から別の線形ベクトル空間の座標へ変換する公式を与えるということです。線形ベクトル空間は局所座標系と呼ばれ、異なる局所座標系の間での座標の変換公式は変換関数と呼ばれます。球は2つの局所座標系と一つの変換関数で構成することができます。

髪の毛の生えた球面を櫛で梳かす

通常、変換公式はとても厄介なもので、背後にある多様体の本質的な性質が見えにくいため、座標を用いた議論は非常に難しいものになります。ここでは、私のお気に入りの髪の毛の生えた球面に櫛を入れる問題を考えてみましょう。球面上のどの点からも毛が生えていると想像して下さい。からまないように櫛で梳いた髪の毛の1本1本全てを、球の表面に接するようにできるでしょうか？ 答はnoです。恐らく局所座標系と変換関数を用いてこれを証明できるはずですが、実はもっとエレガントな証明法があります。

そのアイディアは、球面の接束、つまり球面の全

ての接平面を考えることです。球面上の点を指定するためには2つの座標が必要であり、また接平面上で点を指定するために更に2つの座標が必要であることに注意して下さい。すると接束は4次元の多様体となり、これは直感的に考えることができないものになります。それでも個々の接平面は、はっきり思い浮かべることができます。もし髪の生えた球面を櫛で梳いて髪の毛の1本1本全てを球に接するようにできるなら、球面上の各点を対応する髪の毛に沿ってその端まで動かすと接束の中に曲面が得られますが、その曲面は球面自身とは交叉しません。ここで、次の定理があります。「任意の多様体Xに対してその接束の中にXの変形X'を、XとX'が孤立した点のみで交叉するように構成でき、さらにその交点の数はXのオイラー標数で与えられる。」この定理を用いると、もし(髪の生えた)球面全体を櫛で梳くことができるなら、それは球面のオイラー標数が0であることを意味することになります。

多様体のオイラー標数の定義は多少技術的なところがありますが、曲面の場合にはその三角形分割に帰着します。つまり、曲面上に幾つかの点を取って曲線でつなぎ、その曲線に沿って曲面を切り開くと（曲がった）三角形が得られるようにします。オイラー標数は三角形分割に依存しません。その定義は、点の数と三角形の数の和から辺（曲線）の数を引いたものとして定義されます。図1に示す三角形分割の場合、頂点が6個、辺が12個、三角形が8個あるので、球面のオイラー標数は 6-12+8 = 2となります。従って、（髪の生えた）球面全体を櫛で梳くことはできません。

ベクトル束と交点数

上記の例で示したように、ある多様体の局所座標形と変換関数がはっきり分かっている場合でさえ、通常、その多様体の主要な性質を理解するのは非常に難しいといえます。多様体上の各点に、ファイバーと呼ばれる線形ベクトル空間を付随させてベクトル束を構成することは、幾何学における重要な考え方の一つです。例えば、円筒とメビウスの帯は、円周上の各点に直線を付随させて構成した線束です（図2参照）。円筒に対しては、直線は常に同じ方向に取り付けますが、メビウスの帯に対しては、円周に沿って動くとき、直線が時計方向に回転するようにして、出発点に戻ったとき丁度一回転するようにします。ベクトル束もまた多様体ですが、貼り付ける際に局所座標系の線形構造の一部が保存されるため、非常に特殊な多様体といえます。また、加法や乗法のような基本的代数演算を導入することもできて、背後にある多様体の幾何学を代数の手法によって調べることと不変量を導入することを可能とします。

与えられた多様体M上の各ベクトル束は、どれも以下に述べるようなintersection operationと呼ばれる操作を行うことにより、Mの任意の部分多様体Xから新しい部分多様体を生成できます。M上の各点をベクトル束のファイバーに沿って連続的に動かして、Xと互いに横断的（transversal）なベクトル束の部分多様体Yを得ます。このintersection operationの結果は単純にXとYの交叉（共通部分）$X \cap Y$で与えられます。$X \cap Y$がMの部分多様体であってXに含まれるための十分条件が、後で述べる横断性（transversality）です。与えられた任意のベクトル束の集合から出発して、Mに対し次々にintersection operationを行うことができます。最初はMに対してこの操作を行い、Mの部分多様体X_1を得て、次はX_1に対してこの操作を行い、X_1の部分多様体X_2を得る、という具合です。この操作により、毎回得られる部分多様体の次元が対応するベクトル束のランク（これはファイバーの次元です）の数だけ減っていきます。特に、ベクトル束のランクを足し合わせるとMの次元に一致する場合は、次々にintersection operationを行った結果として幾つかの孤立点が得られます。その点の数を数え上げることにより「交点数」と呼ばれる不変量が得られます。

通常、与えられた部分多様体の連続変形は非常に数多くあります。連続変形の取り方によらず交点数を定義するためにはどうすればよいでしょうか？ まず

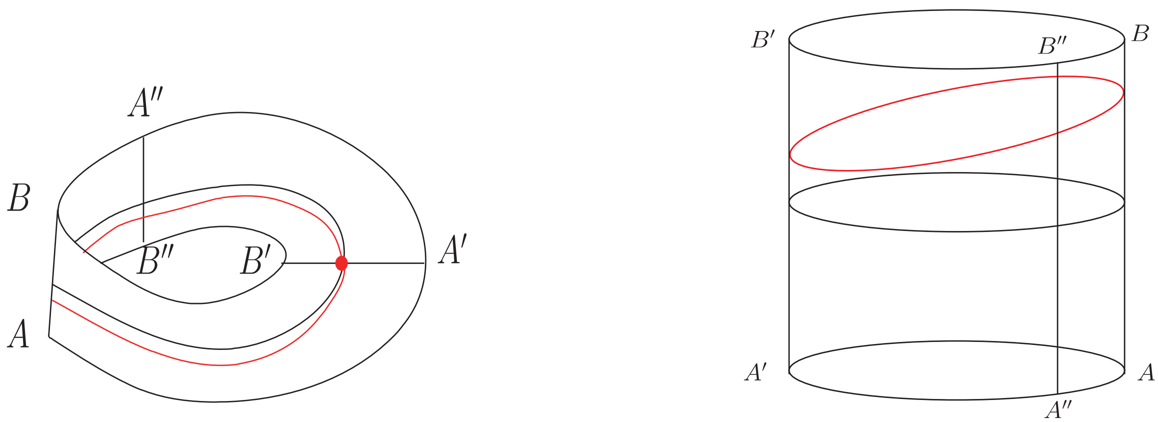
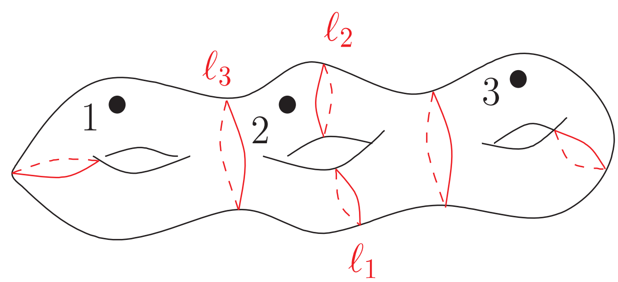


図2　メビウスの帯と円筒のベクトル束。ファイバーは直線*AB*, *A'B'*, *A"B"*等。赤い曲線はファイバーに沿った円周の小さな変形。

第1に、多様体とベクトル束が「向き付け可能」であることを要求する必要があります。向き付け可能でない場合は、うまく定義できるのは交点数が奇数か偶数かという「偶奇性（パリティー）」だけということになります。第2に、intersection operation の操作を行う場合、対応する部分多様体の交叉が横断的な変形のみが許されるものとします。向き付け可能な多様体という概念を導入するのは、主として次の理由によります。ある線形ベクトル空間の2つの座標系を取ったとき、一方の座標系を連続的に動かして他方の座標系にできるか否かに応じて、座標系全体の集合を2つのクラスに分けることができます。例えば、平面上に2つの座標系があるとして、一方の座標系の原点と1番目の座標軸が他方の座標系のそれと一致するようにできます。その場合、2番目の座標軸の方向は、同じ向きか反対向きか2つの可能性があります。多様体の局所座標系について、どの2つの重なり合う局所座標系をとってもそれぞれの座標系の向きが同じ場合、その多様体は「向き付け可能」であると言います。さらに、与えられた多様体の2つの部分多様体の交叉（共通部分）の上のいかなる点に対しても、その点で2つの部分多様体の座標軸のみを用いて多様体の局所座標系の座標を構成できる場合に、2つの部分多様体は横断的に交叉すると言います。例えば、平面内で2つの円が接する場合、2つの円の交叉は横断的ではありません。なぜなら接点で2の円の座標軸は同じ方向を向いているため平面の座標系を構成できないからです。他方、2つの円が2点で交叉する場合、どちらの交点でもそれぞれの円の接線方向は異なり、座標系を構成できるので、交叉は横断的です。これでやっと交点数を正確に定義できます。一つの孤立点で幾つかの向き付け可能な部分多様体が交叉する場合、多様体の座標系の向きと、部分多様体の座標系を接合した座標系の向きとを比較することができます。この際、部分多様体を交叉させる順番が重要です。その順番で部分多様体の座標系を接合するからです。もしも向きが一致する場合、交点に+1を、そうでない場合、-1を割り当てます。交点数は、全交点に割り当てられた数の総和として定義されます。

Feature

　例えば、メビウスの帯は向き付け可能ではありません。従って、メビウスの帯の場合には意味をもつのは交点数が奇数か偶数かというパリティーのみとなります。例えば、図2で見るように、メビウスの帯のファイバーに沿って円を動かすと新しい円を生じ、2つの円の交点の数は常に奇数です。一方、円筒は向き付け可能です。従って交点数は整数です。円筒の場合、図



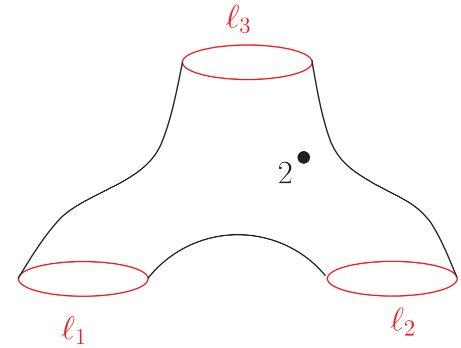


図3　種数3で3個の区別された点をもつリーマン面。赤い線で示す輪に沿って切断すると、パンツ型の図形に分解される。
輪の数が3g–3=6であることに注意。

2に見るように、赤い円を移動して2つの円が交わらないようにできます。従って、円筒の場合、（不変量である）交点数は0でなければならないことになります。言い換えると、交点数のパリティーを用いて円周上のベクトル束としてのメビウスの帯と円筒を区別することができます。

リーマン面のモジュライ空間

多様体としては、どんな曲面もそのオイラー標数から一意的に決定されます。オイラー標数は常に$2\text{-}2g$という形に書かれます。ここでgは曲面の種数と呼ばれ、穴の数と一致します。例えば、球面のオイラー標数は2で種数は0ですが、ドーナツはオイラー標数0（球面に対して行ったように三角形分割して数えてみれば分かります）種数1をもちます。しかし、もし曲面の形に興味があるなら、点の間の距離を測る「測度」を導入することが重要です。通常、距離を測る方法は一つに限りません。「測度」を決めた曲面をリーマン面と呼びます。モジュライ空間とは基本的に何かというと、私たちが分類をしようとしている対象全体に幾何学的構造を与えたものであるといえます。どの1つのリーマン面をとっても、その幾何学は非常に豊かであり、自明ではありません。従って、全てのリーマン面の集合をそのモジュライ空間を用いて調べることに意味があるということは、何とも驚くべきことです。リーマン面のモジュライ空間の座標は、そして次元は何でしょうか? リーマン面上に異なる2点をとると、その間を最短で結ぶ「測地線」と呼ばれる経路があります。例えば、球面の場合、測地線は円弧で、その円弧を含む面は正確に球の中心を通ります。曲面の種数が0あるいは1の場合のモジュライ空間の説明は簡単です。従って、種数が少なくとも2の場合について考えましょう。一つの方法は、曲面を単純な閉じた測地線に沿って切り離し、パンツ型の図形に分解するやり方です（図3参照）。ここで、各測地線上の基準点を記憶し、またその長さを測っておけば、それぞれの断片をどのように貼り合わせるか覚えている限り、一意的に曲面とその計量を元の状態に回復することができます。この場合、モジュライ空間は様々な貼り合わせ方に対応するチャートで被覆され、座標は各測地線の長さと基準点の位置（従って、各測地線に対して2個のパラメーター）に対応します。多様体の切断に用いる単純な閉じた測地線の数が$3g\text{-}3$であることは、簡単に分かります。従って、モジュライ空間は$6g\text{-}6$次元となります。

しかし、puncture（区別された点とも呼ばれる）と

node（結節点）をもつ、もう少し複雑な空間を調べる方が都合が良いことがあります。Punctureを忘れれば元のモジュライ空間を再現できますが、交点理論が成り立つためにはnodeが必要です。曲面上で区別された点を決定するには2つの座標が必要です。従って、n個の区別された点をもつ種数gのリーマン面のモジュライ空間は、$6g-6+2n$次元になります。モジュライ空間は、区別された点に対応するベクトル束の自然な集合をもっています。モジュライ空間の1点、つまり区別された点を何個かもつリーマン面におけるファイバーは、区別された点におけるリーマン面の接平面に他なりません。既にお話ししたものに似たintersection operationを用いることにより、モジュライ空間の幾何を反映する数多くの交点数を導入できます。驚くべきことに、KdV階層として知られる微分方程式系から同じ交点数が得られます。

KdV可積分階層

KdV方程式は$u_t = uu_x + \varepsilon^2 u_{xxx}$という偏微分方程式です。ここで$\varepsilon$は0でない任意の値を取り得るパラメーターで、$u = u(x,t)$は2変数の関数です。KdV方程式の歴史を述べるつもりはありませんが、この方程式は浅い水の中の波の運動をモデル化するものであるとだけ言っておきます。ここでtは時間の役割を果たし、tを固定した場合、関数$u(x,t)$のxに関するグラフは波の形を表します。KdV方程式の最も著しい特徴は、$t_1 = t,\ t_2,\ t_3, \cdots$というように時間変数を追加することが許されて、より大きな方程式系に発展させることが可能であることです。

追加された個々の変数に対する関数$u = u(x,t_1,t_2,t_3,\cdots)$の依存性は、追加された微分方程式によって与えられます。この微分方程式系全体をKdV階層と呼びます。ここで、追加する変数とそれに対応する微分方程式を勝手に与えることは、それまでに得られた方程式と矛盾するため、できないことに注意して下さい。KdV方程式から出発して、幾らでも時間変数を増やすには、方程式系を再帰的に拡張する唯一の方法があるのです。このような、整合的な微分方程式たちによる階層をもつような方程式を可積分であると言い、対応する階層を可積分階層と呼びます。可積分な微分方程式は、通常、見つけることが非常に難しいものです。KdV階層の方程式はどんどん複雑になりますが、どの解も初期条件、つまり全ての時間変数が0の場合の波形だけに依存します。初期条件として$u(x,0) = x^3/6$を選べば、KdV階層の解のテイラー級数展開がリーマン面のモジュライ空間の交点数を全て決定します。変数t_kは区別された点に付随する線束に関してintersection operationをk回繰り返すことに対応し、パラメーターεはリーマン面の種数を示します。

終わりに

リーマン面のモジュライ空間の交点数とKdV階層の関係は、E. ウィッテンによって予言され、M. コンセヴィッチによって証明されました。しかしながら、浅い水路の波を眺めることにより、自然の中で見いだせるKdV方程式が、なぜリーマン面のモジュライ空間のような複雑な空間にとってこれ程重要なのか、未だに深い謎に包まれています。さらに、与えられたリーマン面を与えられた多様体の中に移す、可能なあらゆる方法のデータを付け加えることにより、リーマン面のモジュライ空間を一般化することができます。多様体として何を選ぶかに応じて、KdV階層に類似した微分方程式の階層が他にも数多く得られます。これらの階層は完全に新しいものであり、これまで全く調べられていません。事実、可積分階層の理論で可積分模型を構成することは非常に難しく、従って、超弦理論がこのように広範なクラスの微分方程式の可積分階層を導くことは、非常な驚きです。私は、リーマン面のモジュライ空間の幾何学における可積分性の役割を研究することは、数学の将来の発展にとって非常に有望な方向であると考えます。