FEATURE

IPMU主任研究員 河野俊文
こうの・としたけ
専門分野：数学

組みひもと3次元幾何学、その物理学との関連

物理学と相互作用する幾何学

幾何学と物理学は互いに影響を与えながら発展してきた。19世紀半ばのガウスからリーマンにいたる流れの中で創成された微分幾何学はアインシュタインの一般相対論の基礎となったことはよく知られている。また、ニュートンに始まる古典力学は、ラグランジュ、ハミルトンによる解析力学の定式化を経て、シンプレクティック幾何学とよばれる現代の幾何学の重要な分野を形成している。このように、幾何学と物理学の関わりは、時とし予期しない形で、双方の向きに現れる。

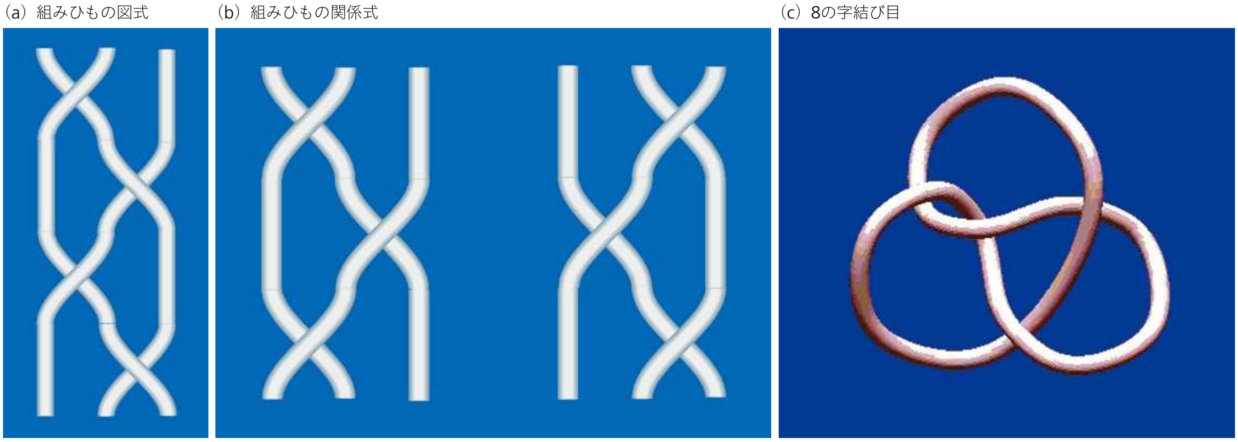
この数十年の幾何学と物理学の相互作用において顕著な点は、量子場の理論が、位相幾何学における深い性質と結びついている点である。ここでは、組みひもの理論と3次元幾何学に焦点をあてて、このような研究の流れを瞥見しよう。

組みひもとディラックのスピノール

組みひもとは、図1(a)に示したように、縦方向の何本かのひもを絡み合わせてできる図形である。ここでは、交差点におけるひもの上下を区別することが重要である。2つの組みひもを縦につなぎ合わせることによって、組みひもの合成を定める。図1(b)の2つの組みひもは、端点を固定して、ひもを動かすことによって互いに移り合う。一般にこのような連続的な変形で互いに移り合う組みひもを同一視する。図1(b)は組みひもの間に成立する最も基本的な関係式を示している。組みひもの概念は1920年代にアルティンによって定義された。

20世紀初頭は、量子力学が確立された時期でもあった。早い時期から組みひもの重要性に着目していた物理学者がディラックである。ディラックは量子力学に現れるスピノールの概念を説明するために、組みひも

図1



(a) 組みひもの図式　(b) 組みひもの関係式　(c) 8の字結び目

を有効に用いた。スピノールとは1回転すると-1倍になって、2回転すると元に戻るような多価性をもつ量である。ディラックのアイデアを説明するために、図2に示した簡単な実験をしてみよう。まずベルトを用意して、片方の端を固定し、もう一方の端を2回転して、ひねりのあるベルトを作る。次にひねった方の端を回転させずに図のように動かすと、ひねりのないベルトに戻すことができる。1回転したベルトでは、このようにひねりを解消することはできない。これは組みひもの言葉では、球面上で360度回転に対応する組みひもは連続的な変形で自明にできないが、720度回転に対応する組みひもは自明にできることを意味していて、スピノールの存在と関わっている。

組みひもから無限次元の幾何学へ

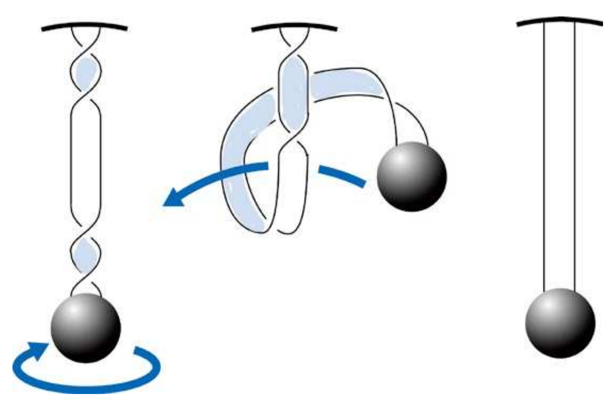
一方、組みひもは位相幾何学において重要な役割を果たす。組みひもの両端を閉じると、結び目あるいは絡み目が得られる。結び目とは、3次元空間内の交わらない閉曲線であり、絡み目とは、互いに交わらない、いくつかの閉曲線の和集合である。例えば、図1(a)の組みひもの両端を閉じることによって、図1(c)の結び目が得られる。結び目は非常に複雑な対象であり、現在の位相幾何学の高度な技法をもってしても、その全貌は解明されていない。3次元トポロジーにおける困難さが結び目の複雑さに凝縮されている。

1980年代半ばに、ジョーンズによって結び目理論の研究に革新的な進歩がもたらされた。作用素環の理論に由来する、結び目のジョーンズ多項式の発見がそれである。ジョーンズは組みひもを線形作用素として表現することにより、結び目と絡み目の位相不変量を抽出した。それは、これまで位相幾何学の古典的手法を用いて構成されてきたアレクサンダー多項式などと基本的に異なる新しい不変量であった。

ジョーンズ多項式は、数年後、ウィッテンによって、場の量子論による定式化が提唱され、3次元のチャーン・サイモンズゲージ理論の分配関数として定式化された。これは無限個の量のある種の平均値として与えられていて、これが数学的にうまく定義できるならば、位相不変であることはその形から明らかである。ここで、位相不変とは、定義した量が長さや角度など計量の情報によらず、連続的な変形で変わらないことを意味する。

また、ジョーンズ多項式は統計力学模型の分配関数としての解釈も可能である。図1(b)に示した組みひもの関係式は ABA＝BAB の形で表され、ヤン・バクス

図2　ベルトのトリック



ター方程式とよばれる。これは、統計力学模型における可解条件であり、その背後にある代数的な構造は、量子群としてドリンフェルトと神保道夫によって定式化された。さらに、ウィッテンの理論を2＋1次元の位相的場の理論として展開すると、2次元共形場理論との関係が明らかになる。共形場理論は1980年代半ばに、物理学者ベラビン、ポリヤコフ、ザモロジコフによって、統計力学の臨界現象における無限自由度の対称性を記述する理論として創始された。その後、土屋昭博と共同研究者によって、無限次元リー環の概念を用いて共形場理論の数学的基礎が構築された。ジョーンズ多項式をキーワードとして、チャーン・サイモンズ理論、共形場理論、量子群などの概念が有機的に関わっていて、これらの分野の発展には、IPMUの数学研究者が多くの貢献をしてきた。

空間の幾何化

局所的な幾何構造を与えたときに、空間が大域的にどのような構造をもつかという問題は重要であり、

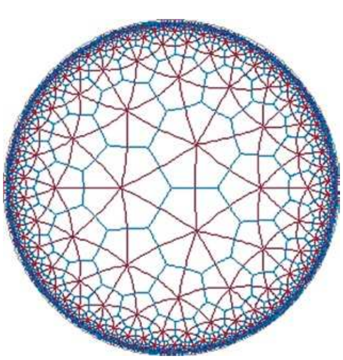
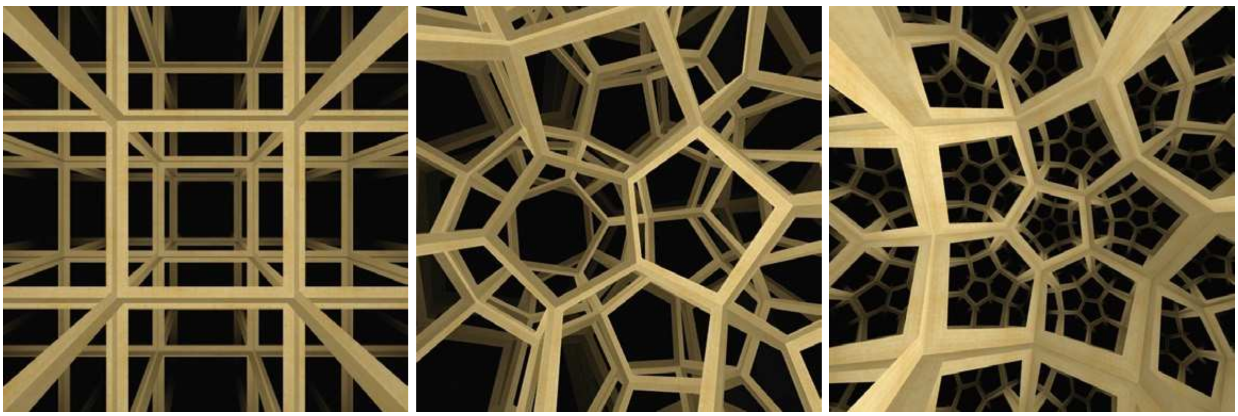


図3　双曲平面のタイルばり

20世紀以来の幾何学の大きな潮流として発展してきた。例えば、向き付けられた閉曲面で、局所的にはユークリッド平面と合同な距離の構造が入るものは、トーラスに限ることが知られている。向き付けられた閉曲面は位相的には、球面、トーラス、さらにトーラスをいくつか連結した種数2以上の曲面と分類される。ここで、連結するトーラスの個数を種数とよぶ。トーラスにはユークリッド平面をモデルとする幾何構造が入る。また、種数2以上の曲面には図3に示した双曲平面をモデルとする幾何構造が入る。図3は、双曲平面の正三角形によるタイルばりを示していて、円の内部に、それぞれの正三角形がすべて合同となるような計量が入っている。図3に示した双曲幾何のモデルはポアンカレ円板とよばれている。このように閉曲面については、その幾何構造として、球面幾何、ユークリッド幾何、双曲幾何の3通りが存在する。これらの曲率は、球面幾何では正の定数、ユークリッド幾何では0、双曲幾何では負の定数である。また、三角形の内角の和は、球面幾何では180度よりも大きくなり、双曲幾何では180度よりも小さくなる。

3次元の空間については、どのような大域的な幾何構造が考えられるだろうか。これが、「空間の幾何化」の問題である。3次元の場合にも、3次元球面（正の定曲率空間）、ユークリッド空間（曲率0の空間）、双曲空間（負の定曲率空間）の3通りの定曲率空間のモデルがある。それ以外に1次元と2次元の幾何構造から構成されるものがあり、3次元では合計8通りの幾何構造のモデルが存在することが知られている。図4に示したのが3通りの定曲率空間の正多面体による分割である。幾



（a）平坦な空間　（b）曲率正の空間　（c）曲率負の空間

図4　ウィークスによるソフトウェア[3]を用いて作成した。

何構造の視点からの3次元トポロジーへのアプローチは1980年代にサーストンによって創始されトポロジーの研究に大きなインパクトを与えた。

図1(c)の8の字結び目の補集合には、双曲幾何構造が入ることが知られている。サーストンにより、いくつかの例外を除くほとんどすべての結び目の補集合に双曲幾何構造が入ることが示され、これは、結び目と組みひもの理論に飛躍的な発展をもたらした。一般の3次元空間に対する幾何化はサーストンによって予想され、数年前に、ペレルマンによって解決された。ペレルマンの手法においては、リッチ流とよばれる、計量についての微分方程式の解の漸近的な挙動が用いられるが、発散する解を制御するために、くりこみなどの物理学の手法が本質的な役割を果たす。これは、幾何学と物理学の新たな相互作用である。

参考文献：
［1］M. Atiyah, Geometry and Physics of Knots, Cambridge University Press, 1990
［2］河野俊丈, 場の理論とトポロジー, 岩波書店, 2008
［3］J.R. Weeks, http://www.geometrygames.org/CurvedSpaces/