サイエンスキャンプ「数学と物理学で挑む素粒子と宇宙」

無限を数える

土屋昭博

東京大学数物連携宇宙研究機構（**IPMU**）

2011年**12**月**27**日

はじめに

「無限を数える」という題を見て、皆さんはどう思いましたか？

- 無限とは何だろう
- 無限を数えることなんて出来るだろうか

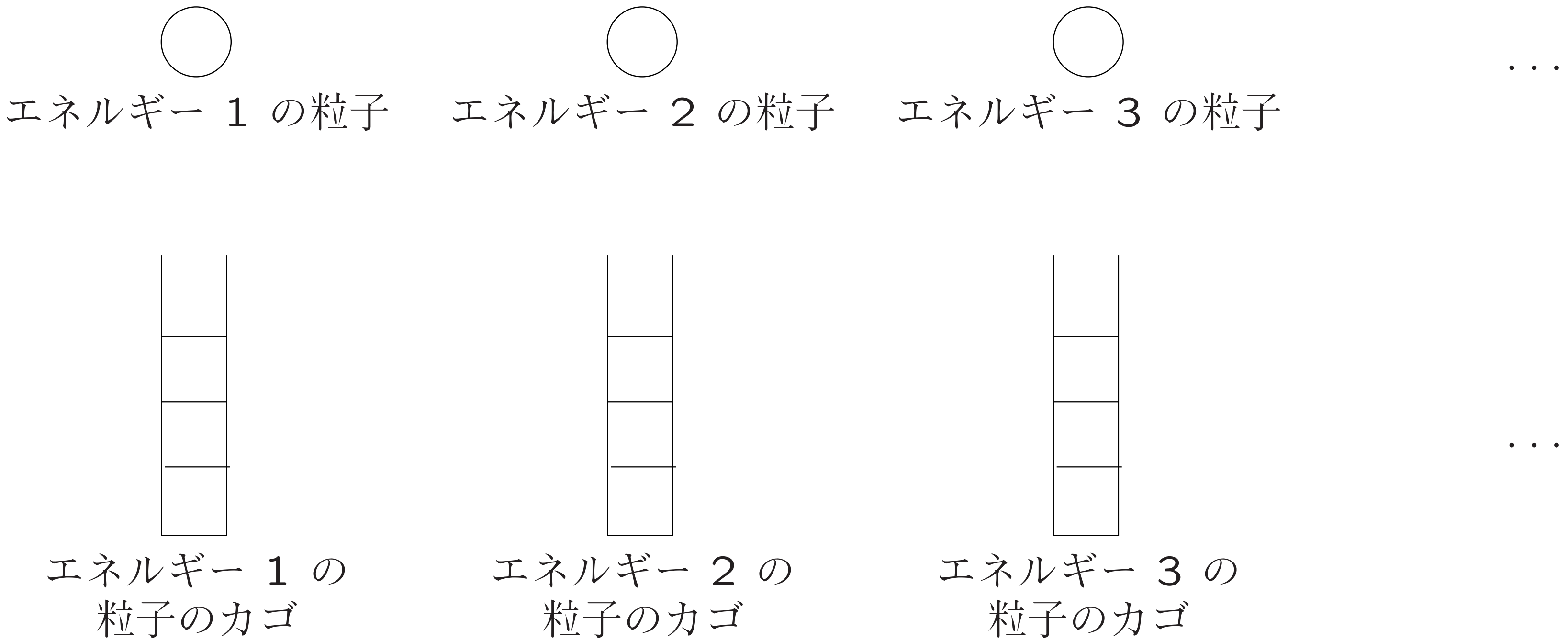
自然界で無限はどんなふうにあたえられるでしょうか？

- 数の世界で素数は無限にある
- 宇宙全体には、どのくらいの数の粒子や星があるのだろうか？

このような場合、無限個または非常に大きい数をどのように扱ったり、法則を出したりしているのだろうか？
この講義では、簡単なおもちゃで思考実験をします。最も重要な考え方は、ある条件のもとで取りうる配置の数の生成関数です。これを考えると無限の姿が浮かび上がってきます。

玉入れゲーム(ボゾン粒子)

用意するもの



ゲームのやり方

- それぞれのカゴに粒子を入れ、粒子の配置 $N = (n_1,\ n_2,\ \cdots)$ を決めて全エネルギー E を計算する

- 全エネルギー E を与えて配置の数を数える

- 全エネルギー　$E = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots$

全エネルギーが0の配置

配置の数　1

エネルギー 1 の粒子　エネルギー 2 の粒子　エネルギー 3 の粒子

全エネルギーE：$0+0+0+\cdots=0$

全エネルギーが1の配置

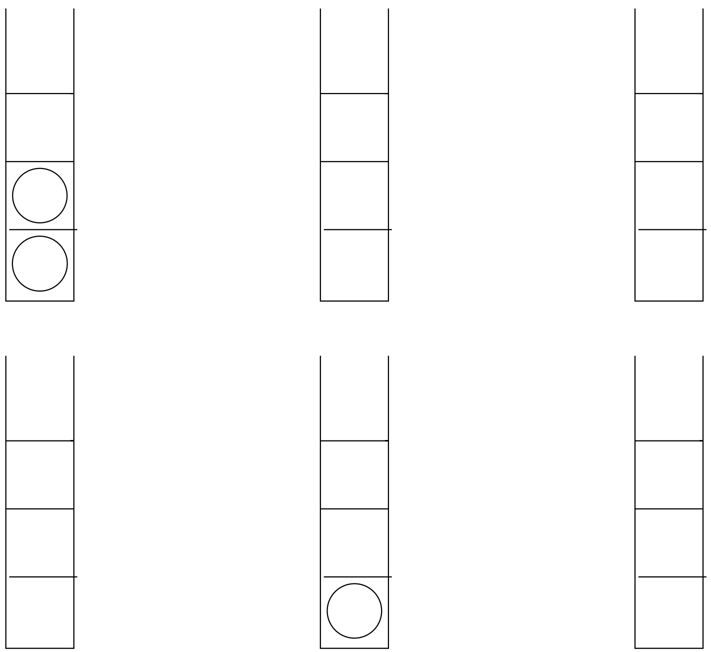
配置の数　1

エネルギー 1 の粒子　　エネルギー 2 の粒子　　エネルギー 3 の粒子

全エネルギーE ： $1 + 2 \times 0 + 3 \times 0 + \cdots = 1$

全エネルギーが２の配置

配置の数　２



エネルギー １の粒子　　エネルギー ２の粒子　　エネルギー ３の粒子

$\cdots$

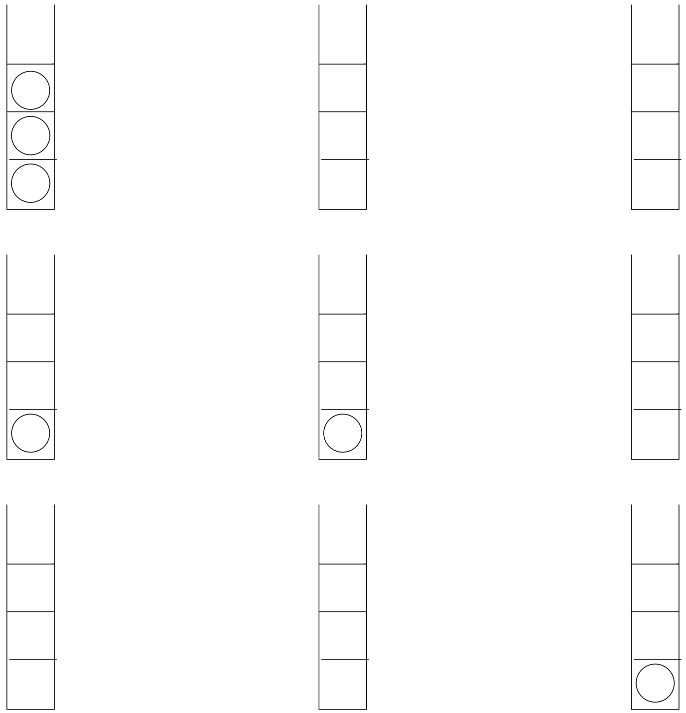
全エネルギー E :
$1\times2+2\times0+3\times0+\cdots=2$

$\cdots$

全エネルギー E :
$1\times0+2\times1+3\times0+\cdots=2$

全エネルギーが３の配置

配置の数　3



エネルギー 1 の粒子　エネルギー 2 の粒子　エネルギー 3 の粒子

$\cdots$ 全エネルギー E :
$1 \times 3 + 2 \times 0 + 3 \times 0 + \cdots = 3$

$\cdots$ 全エネルギー E :
$1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 0 + \cdots = 3$

$\cdots$ 全エネルギー E :
$1 \times 0 + 2 \times 0 + 3 \times 1 + \cdots = 3$

まとめ

$(n_1,\ n_2,\ n_3,\ \cdots)$: エネルギー $E_1,\ E_2,\ E_3,\ \cdots$ のカゴの入っている粒子の数の配置

全エネルギー	配置	配置の数
0	(0, 0, 0, ···)	1
1	(1, 0, 0, ···)	1
2	(2, 0, 0, ···) (0, 1, 0, ···)	2
3	(3, 0, 0, 0, ···) (1, 1, 0, 0, ···) (0, 0, 1, 0, ···)	3
4	(4, 0, 0, 0, 0, ···) (2, 1, 0, 0, 0, ···) (0, 2, 0, 0, 0, ···) (1, 0, 1, 0, 0, ···) (0, 0, 0, 1, 0, ···)	5

一般の場合へ

全エネルギー E 　 $E = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$
配置の数 P_E 　 $P_0 = 1,\ P_1 = 1,\ P_2 = 2,\ P_3 = 3,\ P_4 = 5,\ \cdots$

問題

全エネルギーが　5, 6 の時の
すべての配置を作り、配置の数 $P_5,\ P_6$ を求めなさい

全エネルギー **5** の時　$P_5 = 7$

(5, 0, 0, 0, 0)
(3, 1, 0, 0, 0)
(1, 2, 0, 0, 0)
(2, 0, 1, 0, 0)
(0, 1, 1, 0, 0)
(1, 0, 0, 1, 0)
(0, 0, 0, 0, 1)

全エネルギー **6** の時　$P_6 = 11$

(6, 0, 0, 0, 0, 0)
(4, 1, 0, 0, 0, 0)
(2, 2, 0, 0, 0, 0)
(0, 3, 0, 0, 0, 0)
(3, 0, 1, 0, 0, 0)
(1, 1, 1, 0, 0, 0)
(2, 0, 0, 1, 0, 0)
(0, 1, 0, 1, 0, 0)
(1, 0, 0, 0, 1, 0)
(0, 0, 0, 0, 0, 1)
(0, 0, 2, 0, 0, 0)

生成関数　(q： 不定元)

発想の転換

$$\begin{aligned}\phi(q) &= P_0 + P_1 q + P_2 q^2 + P_3 q^3 + P_4 q^4 + \cdots \\ &= 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 + \cdots\end{aligned}$$

- 生成関数 $\phi(q)$ を導入
- $\phi(q)$ に何か規則性があるだろうか？
- 規則性を発見して $\phi(q)$ を求める
- その上で逆に $(P_0, P_1, P_2, \cdots)$ を求める

方法

エネルギー E 粒子だけを使った場合の生成関数

$$\phi^{(E)}(q) = P_0^{(E)} + P_1^{(E)} q + P_2^{(E)} q^2 + \cdots$$

エネルギー 1 の粒子だけの場合

全エネルギー	粒子の個数	配置の数
0	0	1
1	1	1
2	2	1
3	3	1
4	4	1

$P_E^{(1)}$ をエネルギー 1 の粒子だけを使って全エネルギー E をつくる配置の数とすると

$$P_0^{(1)} = 1,\ P_1^{(1)} = 1,\ P_2^{(1)} = 1,\ \cdots$$

$$\phi^{(1)}(q) = P_0^{(0)} + P_1^{(1)} q + P_2^{(1)} q^2 + \cdots = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}$$

どうして上の式になる？

$$\begin{aligned}(1 + q + q^2 + \cdots)(1-q) = 1 \quad & + \quad q + q^2 + q^3 + \cdots \\ & - \quad q - q^2 - q^3 - q^4 - \cdots = 1\end{aligned}$$

エネルギー 2 の粒子だけの場合

全エネルギー	粒子の個数	配置の数
0	0	1
1		0
2	1	1
3		0
4	2	1

$$P_E^{(2)}:\ P_0^{(2)} = 1,\ P_1^{(2)} = 0,\ P_2^{(2)} = 1,\ \cdots$$

$$\phi^{(2)}(q) = 1 + q^2 + q^4 + q^6 + \cdots = \frac{1}{1-q^2}$$

エネルギー m の粒子だけの場合

$(m = 1, 2, 3, \cdots)$

$P_E^{(m)} = 1$ (E が m の倍数のとき)

$P_E^{(m)} = 0$ (E が m の倍数でないとき)

生成関数

$$\phi^{(m)}(q) = 1 + q^m + q^{2m} + q^{3m} + \cdots = \frac{1}{1 - q^m}$$

問題

$$
\begin{aligned}
\phi(q) &= 1+q+2q^2+3q^3+5q^4+\cdots \\
\phi^{(1)}(q) &= 1+q+q^2+q^3+\cdots = \frac{1}{1-q} \\
\phi^{(2)}(q) &= 1+q^2+q^4+q^6+\cdots = \frac{1}{1-q^2} \\
\vdots & \qquad\qquad \vdots \\
\phi^{(m)}(q) &= 1+q^m+q^{2m}+q^{3m}+\cdots = \frac{1}{1-q^m}
\end{aligned}
$$

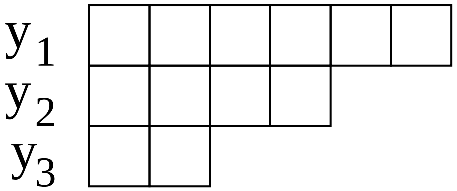
この式にはどんな関係があるだろうか。いろいろ試して、成り立つ公式を発見しなさい。公式が出来たら、本当に成立しているかを証明しなさい。

定理

$$
\begin{aligned}
\phi(q) &= \phi^{(1)}(q) \cdot \phi^{(2)}(q) \cdot \phi^{(3)}(q) \cdots \\
&= \frac{1}{1-q}\ \frac{1}{1-q^2}\ \frac{1}{1-q^3}\ \cdots \\
&= (1+q+q^2+\cdots)(1+q^2+q^4+\cdots)(1+q^3+q^6+\cdots)\cdots
\end{aligned}
$$

生成関数＝エネルギーE粒子の生成関数の積

ヤング図形



ルール

上から順番に y_1, y_2, y_3, $\cdots$ 個の箱を横に並べる

$y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \cdots \geq 0$ でなければならない

ヤング図形 $Y = (y_1, y_2, y_3, \cdots)$ の箱の数 は全部で $|Y| = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots$

P^Y_n: 箱の数が全部で n の場合のヤング図形の数を求めてみよう

$$P^Y_0 = 1,\ P^Y_1 = 1,\ P^Y_2 = 2,\ P^Y_3 = 3,\ P^Y_4 = 5$$

となることを確認せよ

ヤング図形の数え上げ

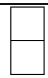
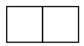
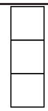
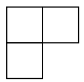
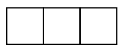
全部の箱の数	ヤング図形	Y	図形の数
0		$(0,0,0,\cdots)$	1
1	$\ydiagram{1}$	$(1,0,0,\cdots)$	1
2	$\ydiagram{2}$	$(2,0,0,\cdots)$	2
	$\ydiagram{1,1}$	$(1,1,0,\cdots)$	
	$\ydiagram{3}$	$(3,0,0,\cdots)$	
3	$\ydiagram{2,1}$	$(2,1,0,\cdots)$	3
	$\ydiagram{1,1,1}$	$(1,1,1,\cdots)$	
	$\ydiagram{4}$	$(4,0,0,\cdots)$	
	$\ydiagram{3,1}$	$(3,1,0,\cdots)$	
4	$\ydiagram{2,2}$	$(2,2,0,\cdots)$	5
	$\ydiagram{2,1,1}$	$(2,1,1,0,\cdots)$	
	$\ydiagram{1,1,1,1}$	$(1,1,1,1,0,\cdots)$	

問題

問題 1　　$n = 5, 6$ のとき、ヤング図形をすべて数えあげ、P_5^Y, P_6^Y を求めよ

定理

全エネルギー E を持つボゾン粒子の配置と箱の数 Y を持つヤング図形には 1 対 1 の対応がある

ボゾン粒子		ヤング図形		
E	$(n_1, n_2, \cdots)$	Y		$(y_1, y_2, \cdots)$
0	$(0, 0, \cdots)$	0		$(0, 0, \cdots)$
1	$(1, 0, 0, \cdots)$	1		$(1, 0, 0, \cdots)$
2	$(2, 0, 0, \cdots)$	2		$(1, 1, 0, \cdots)$
	$(0, 1, 0, \cdots)$			$(2, 0, 0, \cdots)$
3	$(3, 0, 0, \cdots)$	3		$(1, 1, 1, 0, \cdots)$
	$(1, 1, 0, \cdots)$			$(2, 1, 0, \cdots)$
	$(0, 0, 1, 0, \cdots)$			$(3, 0, 0, \cdots)$

問題　　　この対応の規則を各自で見つけてください

フェルミ粒子の玉入れゲーム

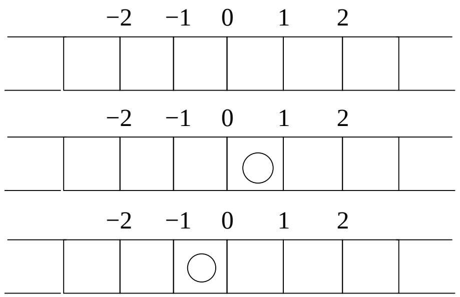
用意するもの

電荷が $+1$ でエネルギー $\cdots, -\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{5}{2}, +\frac{7}{2}, \cdots$ を持つ粒子
エネルギーが $\cdots, -\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{5}{2}, +\frac{7}{2}, \cdots$ を持つカゴ

玉入れゲームのルール

同じエネルギーのカゴにはひとつの粒子しか入れられない
全電荷 c で全エネルギー E を与える配置の数を数える

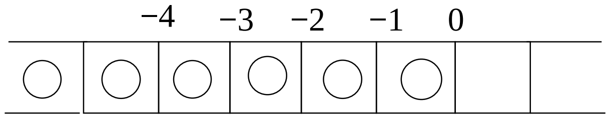
粒子の配置



全エネルギー	全電荷
0	0
$\frac{1}{2}$	1
$-\frac{1}{2}$	1

ただし、これだと全エネルギーがいくらでも大きい負の配置があらわれる。好ましくない。ディラックの空穴原理を導入して解決

ディラックの真空



- 負のエネルギーのカゴは全部つまっている
- 正のエネルギーのカゴは全部空いている
- この配置の全エネルギーを0、全電荷は0と考え直す

負のエネルギー（$-i$）のカゴのひとつに空きができた時はどうなるか？
正のエネルギー（i）と負の電荷（-1）ができる（ディラックの反粒子）

一般の配置 M

- 有限個の正のエネルギーのカゴ（全部でr個）がつまっている
- 有限個の負のエネルギーのカゴ（全部でs個）が空いる

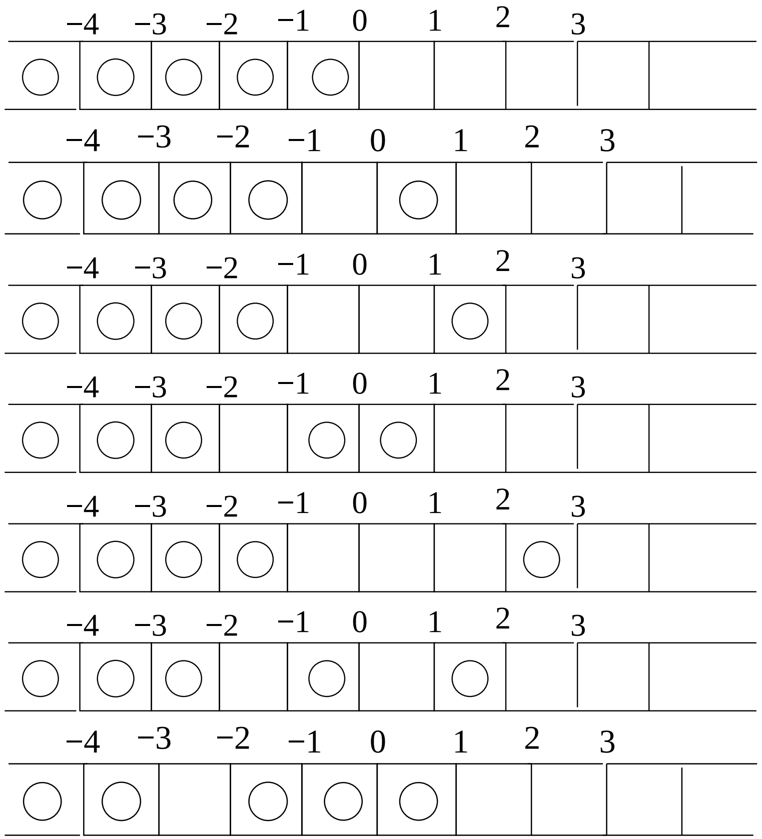
全エネルギー$E(M)$と全電荷$c(M)$

$$E(M) = \underbrace{j_1 + j_2 + \cdots + j_r}_{\text{正のエネルギーのカゴ}} + \underbrace{i_1 + i_2 + \cdots + i_s}_{\text{負のエネルギーのカゴ}}$$

$$c(M) = r - s$$

全電荷 0 の場合の配置の数え上げ

配置　　　　全エネルギー



0

1/2 + 1/2 =1

1/2 + 3/2 = 2

3/2 + 1/2 = 2

1/2 + 5/2 = 3

3/2 + 3/2 = 3

5/2 + 1/2 = 3

P^F_E : 全電荷0, 全エネルギー E のフェルミ粒子の配置の数

$P^F_0 = 1$

$P^F_1 = 1$

$P^F_2 = 2$

$P^F_3 = 3$

.
.
.

不思議な現象

$$P_0 = P_0^Y = P_0^F = 1$$
$$P_1 = P_1^Y = P_1^F = 1$$
$$P_2 = P_2^Y = P_2^F = 2$$
$$P_3 = P_3^Y = P_3^F = 3$$
$$P_4 = P_4^Y = P_4^F = 5$$
$$P_5 = P_5^Y = P_5^F = 7$$
$$P_6 = P_6^Y = P_6^F = 11$$
$$\vdots$$

が成立する

問題

全電荷0，全エネルギーE が 4，5，6 の配置をすべて数え上げP_4^F，P_5^F，P_6^Fを求めよ。（答 $P_4^F = 5$，$P_5^F = 7$，$P_6^F = 11$）

定理

$$P_E = P_n^Y = P_E^F, \quad E = n = 0, 1, 2, \cdots$$

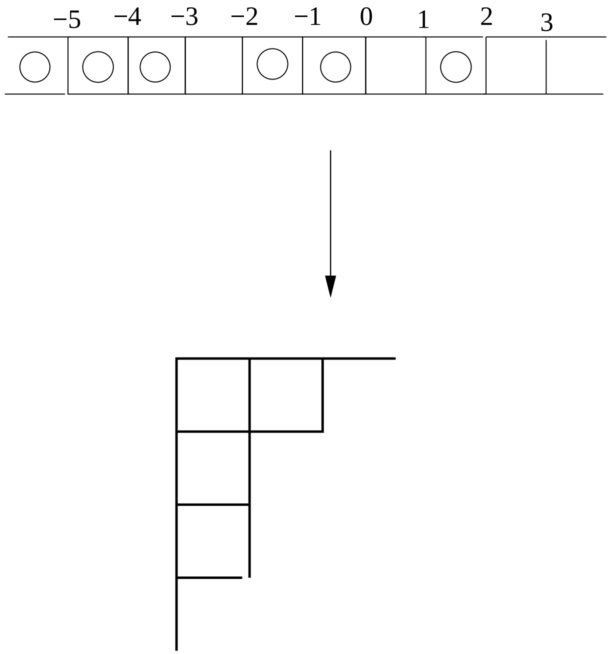
が成立する

全エネルギー E を持つボゾン粒子の配置の数と全箱数が $n = E$ を持つヤング図形の数には１対１の対応があることはすでに調べた。

フェルミ粒子とヤング図形の関係は？

フェルミ粒子とヤング図形

全電荷 $c = 0$ の場合

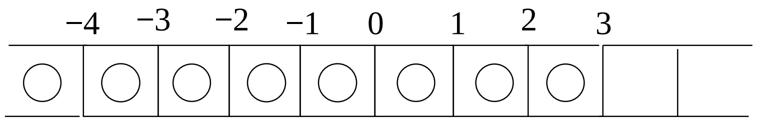


- 負エネルギーから正エネルギーの方向に進む
- カゴがつまっていたらヤング図形の線を一つ上に進める
- 空箱に出会ったら右に 1 個進める
- つまっていたらまた上に 1 個進める
- 空いていたら右に 1 個進める
- $\cdots$

- 箱の数 4 は全エネルギー $E = 4$ になっている

問題 25 ページの配置に対応するヤング図形を書いてみよう

全電荷 3を持つエネルギーが一番低い状態（真空）

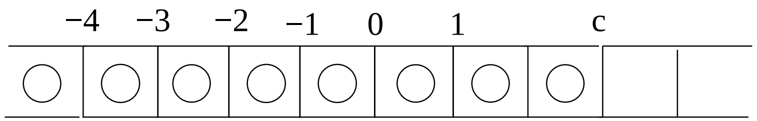


全エネルギー: $E = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{3^2}{2}$

一般に全電荷cの場合：$E = \frac{c^2}{2}$

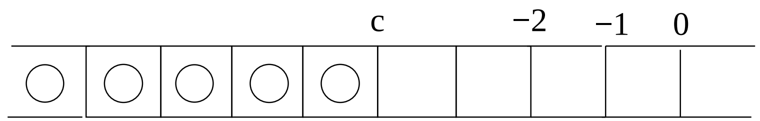
説明

- $c \geq 0$



$E = (\frac{1}{2}) + (\frac{3}{2}) + \cdots + (|c| - \frac{1}{2}) = \frac{c^2}{2}$

- $c \leq 0$



$E = (\frac{1}{2}) + (\frac{3}{2}) + \cdots + (|c| - \frac{1}{2}) = \frac{c^2}{2}$

全電荷cのフェルミ粒子の配置の全エネルギー

- カゴの並びの境目をcだけずらす
- $c = 0$の場合と同じようにヤング図形を描く

全エネルギーは

$E = \frac{c^2}{2} + |Y|$

となる

結論　1

「ボゾン粒子の配置」と「ヤング図形」と「電荷ゼロのフェルミ粒子の配置」には１対１の対応がある

対応する配置の全エネルギーと図形の数は同じになる

{ボゾン粒子の配置}

↕ １対１

{ヤング図形}

↕ １対１

{電荷０のフェルミ粒子の配置}

全エネルギー

↕

箱の数

↕

全エネルギー

結論 2

「電荷 c のフェルミ粒子の配置」とヤング図形には 1 対 1 の対応がある

ただし、フェルミ粒子の全エネルギー E とヤング図形の箱の数の間の関係は

$E = \frac{c^2}{2} + |Y|$

$$
\begin{tikzcd}
\{\text{フェルミ粒子の配置}\}M \arrow[d, leftrightarrow, "1\text{ 対 }1"] & E(M) \arrow[d, leftrightarrow] \\
\{\text{全電荷}\} \times \{\text{ヤング図形}\}(c, Y) & \frac{c^2}{2} + |Y|
\end{tikzcd}
$$

全電荷cのフェルミ粒子配置の生成関数

$$\chi^{(c)}(q) = q^{\frac{1}{2}c^2}\phi(q) = q^{\frac{1}{2}c^2}\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots}$$

- 「ボゾン粒子の配置」と「電荷ゼロのフェルミ粒子の配置」には 1 対 1 の対応があるから $\phi(q)$ を使う

- ただし、全電荷 c を持つ配置の真空はエネルギー $\frac{c^2}{2}$ を持つから $q^{\frac{1}{2}c^2}$ を積に含める

もう一つの変数 z を用意して全電荷 c の生成関数を足し合わせる

$$\chi(q,z) = \sum_{c=-\infty}^{\infty} z^c \chi^{(c)}(q)$$

$\sum_c$: summation は c について和を取る記号

不思議な等式

$$\chi(q,z) = \left(\sum_{c=-\infty}^{\infty} z^c q^{\frac{1}{2}c^2}\right)\left(\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots}\right) = \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(z^n+z^{-n})q^{\frac{1}{2}c^2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n}$$

$\prod$：ギリシャ文字 P に対応。プロダクトと読む, $\prod_n$：n についての積を取る記号

全電荷 c を持つフェルミ粒子配置の生成関数は、電荷を持たないボゾン粒子配置の生成関数と全電荷だけを含む部分に分けられる

$\chi(q,z)$ のもう一つの決め方

エネルギー $j = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \cdots$ のカゴごとに考える
エネルギー j の生成関数への寄与はカゴがつまっている場合と空の場合のふたつの和になる

$j > 0$ の場合：空（$c = 0$)、つまっている（$c = 1$）

$$\chi_j(q,z) = \underbrace{1}_{c=0} + \underbrace{zq^j}_{c=1}$$

$j < 0$ の場合：空（$c = -1$)、つまっている（$c = 0$）

$$\chi_j(q,z) = \underbrace{z^{-1}q^{-j}}_{c=-1} + \underbrace{1}_{c=0}$$

$$\underbrace{\chi(q,z) = \prod_j \chi_j(q,z)}_{\text{定理}} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + zq^{n-\frac{1}{2}})(1 + z^{-1}q^{n-\frac{1}{2}})$$

ヤコビの３重積公式

ふたつの生成関数は等しい。さらに分母をはらって

定理

$$\left(1+\sum_{n\geq 1} q^{\frac{1}{2}n^2}(z^n+z^{-n})\right)=\prod_{n\geq 1}(1-q^n)(1+zq^{n-\frac{1}{2}})(1+z^{-1}q^{n-\frac{1}{2}})$$

問題

ヤコビ公式の右辺

$$\prod_{n\geq 1}(1-q^n)(1+zq^{n-\frac{1}{2}})(1+z^{-1}q^{n-\frac{1}{2}})$$

を展開し、q の巾の小さいものからその係数が左辺と一致することを確かめよ

モジュラー不変性

- この一致は驚くべきものである。現在でも、この公式は整数論をはじめとして、いたる所に顔を出している。私の専門分野の数学、数理物理学にもしばしば現れ、強力な役割を演じている。
- この関数はモジュラー変換で変わらないという不思議な性質を持っている。モジュラー不変性は約 10 年前に解決したフェルマー予想で大きな役割を演じた。
- また、最近の素粒子論におけるホットな話題である超弦理論においても重要な役割をはたしている。

まとめ

- ボゾン粒子（電荷ゼロ）とフェルミ粒子（電荷＋1）が取りうる配置の数え上げをした。
- ボゾン粒子配置のエネルギーごとの数え上げから、生成関数を導入した。
- 全エネルギーの生成関数はエネルギーごとの生成関数の積になることがわかった。
- ヤング図形とボゾン粒子の配置は 1 対 1 で対応することがわかった。
- ヤング図形はフェルミ粒子の全電荷ゼロの配置にも 1 対 1 対応することがわかった。
- これらを使ってフェルミ粒子の全電荷 c の配置の生成関数を求めた。
- フェルミ粒子の全電荷 c の配置の生成関数をもう一つの方法で決めた。
- この二つが同じということからヤコビの３重積公式が得られた。
- 生成関数や不定次元 q はどのような意味をもつのだろう？これでどうして無限を数えたことになるのだろう？